



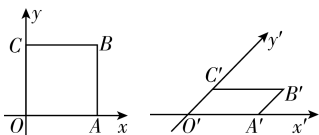
# 第十一章 立体几何初步

## 11.1 空间几何体

### 11.1.1 空间几何体与斜二测画法

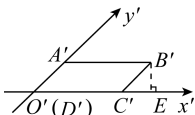
#### 题型诀

**1-1. B** 【解析】如图所示为正方形  $OABC$  及其直观图  $O'A'B'C'$ , 显然  $OC=OA, O'C' \neq O'A'$ , A 错误;  $\angle COA = \angle OAB, \angle C'O'A' \neq \angle O'A'B'$ , C 错误; 正方形是特殊的菱形, 直观图为四边不相等的平行四边形, D 错误; 水平放置的三角形的直观图仍是三角形, B 正确. 故选 B.

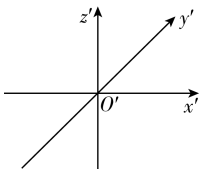


**1-2.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$**  【解析】作

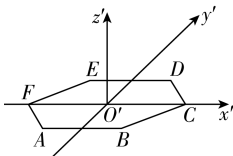
出正方形  $ABCD$  的直观图  $A'B'C'D'$  如图所示. 因为  $O'A' = B'C' = 1$ ,  $\angle B'C'x' = 45^\circ$ , 所以顶点  $B'$  到  $x'$  轴的距离为  $1 \times \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .



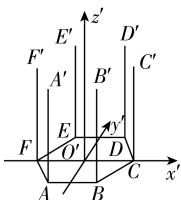
**2-1. 【解】** (1) 画轴: 画  $x'$  轴、 $y'$  轴、 $z'$  轴, 三轴相交于点  $O'$ , 使  $\angle x'O'y' = 45^\circ$ ,  $\angle x'O'z' = 90^\circ$ , 如图①所示.



图①



图②

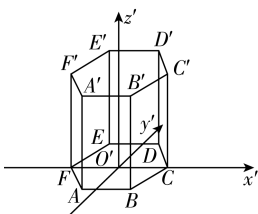


图③

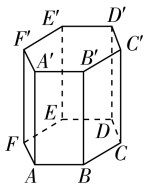
(2)画底面:在面  $x'O'y'$  内,画出正六边形的直观图  $ABCDEF$ ,如图②所示.

(3)画侧棱:过  $A, B, C, D, E, F$  各点分别作  $z'$  轴的平行线,在这些平行线上分别截取  $AA', BB', CC', DD', EE', FF'$  都等于侧棱长(侧棱尺寸自定),如图③所示.

(4)成图:顺次连接  $A', B', C', D', E', F'$ , 如图④所示,并加以整理(去掉辅助线,将被遮挡的线段改为虚线),就得到正六棱柱的直观图,如图⑤所示.



图④



图⑤

**2-2. 【解】**(1)画轴. 如图①所示,画  $x$  轴、 $z$  轴,使  $\angle xOz = 90^\circ$ .

(2)画圆柱的两底面. 以  $O$  为中点,在  $x$  轴上取线段  $AB = 3 \text{ cm}$ , 则  $OA = OB =$

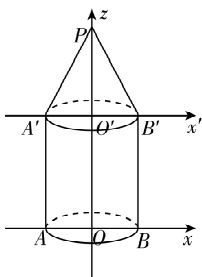
$\frac{3}{2} \text{ cm}$ . 利用椭圆模板画椭圆,使其经过

$A, B$  两点,这个椭圆就是圆柱的下底面.

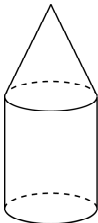
在  $Oz$  上截取点  $O'$ ,使  $OO' = 4 \text{ cm}$ ,过点  $O'$ 作  $Ox$  的平行线  $O'x'$ ,类似圆柱下底面的作法作出圆柱的上底面.

(3)画圆锥的顶点. 在  $Oz$  上截取点  $P$ ,使  $PO' = 3 \text{ cm}$ .

(4)成图. 连接  $A'A, B'B, PA', PB'$ ,并整理,得到此几何体的直观图,如图②所示.



图①



图②

**3-1. B** 【解析】因为  $\triangle A_1B_1C_1$  的面积为  $2\sqrt{2}$ ,

所以  $2\sqrt{2} = \frac{1}{2}A_1C_1 \cdot B_1C_1 \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times$

$2 \cdot B_1C_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 解得  $B_1C_1 = 4$ , 所以  $BC =$

$8, AC = 2$ , 由题图知  $AC \perp BC$ , 则由勾股定

理得  $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{2^2 + 8^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$ .

**3-2. C** 【解析】由题图得  $DC = 4$ , 故直

观图的面积为  $\frac{1}{2} \times (2+4) \times 2 = 6$ , 则原图

形的面积  $S = 6 \times 2\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$ .

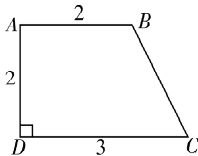
**3-3. 【解】** 如图, 根据画直观图的规则,

可知直观图中  $A_1D_1$  平行于  $y_1$  轴,  $A_1D_1 =$

$1 \Rightarrow$  原图中  $AD \parallel y$  轴,  $AD \perp DC$ , 且  $AD = 2A_1D_1 = 2$ .

直观图中  $A_1B_1 \parallel C_1D_1, A_1B_1 = \frac{2}{3}C_1D_1 =$

$2 \Rightarrow$  原图中  $AB \parallel CD, AB = \frac{2}{3}CD = 2$ .



则四边形  $ABCD$  是上底和下底边长分别为 2, 3, 高为 2 的直角梯形, 如图.

故其面积  $S = \frac{1}{2} \times (2+3) \times 2 = 5$ .

### 巩固练

**1. B** 【解析】将所给图形还原为正方

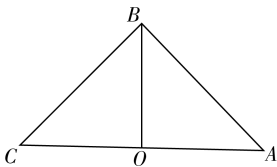
体, 并将已知面“上”“东”分别指向上

面、东面, 则标记“ $\triangle$ ”的面的方位



是北.

2. **D** 【解析】根据题意, 将  $\triangle A'B'C'$  还原成原图, 如图.



对于 A,  $\triangle ABC$  中, 有  $OC = OA = OB = 2$ ,  $AC \perp OB$ , 所以  $BC = AB = 2\sqrt{2}$ ,  $AC = 4$ , 故  $\triangle ABC$  是等腰直角三角形, A 错误;

对于 B,  $\triangle ABC$  的面积是  $\frac{1}{2}AC \cdot OB =$

$4$ ,  $\triangle A'B'C'$  的高为  $O'B' \times \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

所以  $\triangle A'B'C'$  的面积为  $\frac{1}{2}A'C' \times \frac{\sqrt{2}}{2} =$

$\sqrt{2}$ ,  $\triangle ABC$  的面积是  $\triangle A'B'C'$  的面积的  $2\sqrt{2}$  倍, B 错误;

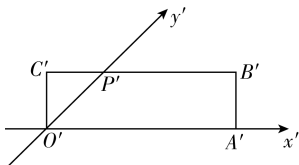
对于 C, 因为  $OB = 2$ , 所以 B 的坐标为  $(0, 2)$ , C 错误;

对于 D,  $\triangle ABC$  的周长为  $BC + AB + AC = 4 + 4\sqrt{2}$ , D 正确.

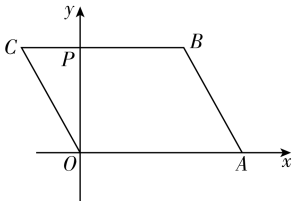
故选 D.

3. **14** 【解析】如图①, 在直观图中, 设  $O'y'$  与  $B'C'$  交于点  $P'$ , 则  $C'P' = 1$ ,  $P'B' = 3$ ,  $O'P' = \sqrt{2}$ .

如图②, 在原图形中,  $OA = 4$ ,  $CP = 1$ ,  $OP = 2O'P' = 2\sqrt{2}$ ,  $OC = \sqrt{8+1} = 3$ , 所以原图形周长是  $2 \times (4+3) = 14$ .



图①



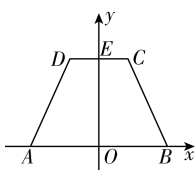
图②



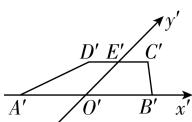
4. 【解】第一步,如图①,在等腰梯形  $ABCD$  中,设  $O$  为  $AB$  的中点,  $E$  为  $DC$  的中点,以  $O$  为坐标原点,  $AB$  所在直线为  $x$  轴,  $OE$  所在直线为  $y$  轴,建立平面直角坐标系  $xOy$ . 建立如图②所示的坐标系  $x'O'y'$ , 并使  $\angle x'O'y' = 45^\circ$ .

第二步,在坐标系  $x'O'y'$  中,以  $O'$  为  $A'B'$  的中点,在  $x'$  轴上取  $A'B' = AB$ , 在  $y'$  轴上取  $O'E' = \frac{1}{2}OE$ , 过点  $E'$  作  $D'C'$  平行于  $x'$  轴, 并使  $D'C' = DC$  且  $E'$  为  $D'C'$  的中点.

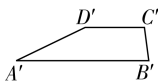
第三步,连接  $A'D'$ ,  $B'C'$ , 擦去  $x'$  轴和  $y'$  轴得到梯形  $A'B'C'D'$ . 梯形  $A'B'C'D'$  就是等腰梯形  $ABCD$  水平放置的直观图,如图③所示.



图①



图②



图③

5. C 【解析】过点  $C'$  作  $y'$  轴的平行线交  $x'$  轴于点  $D'$ , 如图①,  $O'C' = 2$ ,  $\angle C'O'D' = 30^\circ$ ,  $\angle C'D'O' = 135^\circ$ ,  $\angle D'C'O' = 15^\circ$ , 由正

弦定理可得  $\frac{O'D'}{\sin 15^\circ} = \frac{2}{\sin 135^\circ} =$

$\frac{D'C'}{\sin 30^\circ}$ , 可得  $O'D' = \sqrt{3} - 1$ ,  $D'C' = \sqrt{2}$ ,

将直观图还原为平面图形, 并过点  $C$  作  $OA$  的垂线, 垂足为点  $D$ , 如图②, 则

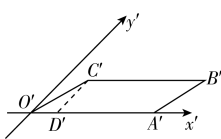
$OD = O'D' = \sqrt{3} - 1$ ,  $CD = 2D'C' = 2\sqrt{2}$ ,

$OC = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3} - 1)^2} = \sqrt{12 - 2\sqrt{3}}$ ,

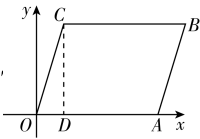
$OA = O'A' = 4$ , 显然  $OC \neq OA$ , 即原图形

既不是正方形又不是菱形, 原图形的

面积为  $4 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ . 故选 C.



图①

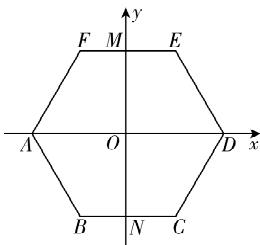


图②

6. **C** 【解析】根据斜二测画法的规则，  
 $A, B, D$  中等边三角形的底边  $AB$  都没有改变，且对应边与  $x$  轴的夹角相等，  
 而三角形的高都平行于  $y$  轴或与  $y$  轴重合，因此它们的高相等，故  $A, B, D$  中三组三角形的直观图是全等的. 而对于  $C$ ，画成直观图之后，第一个三角形和第二个三角形的对应角不相等，因此两个三角形的直观图不全等. 故选  $C$ .

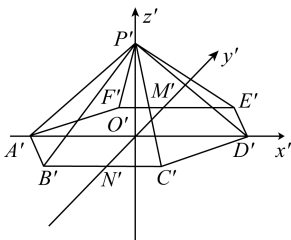
7. 【解】(1) 画底面.

①在正六边形  $ABCDEF$  中，取  $AD$  的中点为  $O$ ， $EF$  的中点为  $M$ ， $BC$  的中点为  $N$ ，以  $AD$  所在直线为  $x$  轴， $MN$  所在直线为  $y$  轴，两轴相交于点  $O$  (如图①所示)，画相应的  $x'$  轴、 $y'$  轴和  $z'$  轴，三轴交于点  $O'$ ，使  $\angle x'O'y' = 45^\circ$ ， $\angle x'O'z' = 90^\circ$  (如图②所示).



图①

②在图②中，以  $O'$  为中点，在  $x'$  轴上取  $A'D' = AD$ ，在  $y'$  轴上取  $M'N' = \frac{1}{2}MN$ ，以  $N'$  为中点画  $B'C'$  平行于  $x'$  轴，并且等于  $BC$ ；再以  $M'$  为中点画  $E'F'$  平行于  $x'$  轴，并且等于  $EF$ .



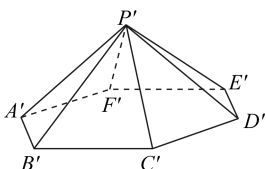
图②



③连接  $A'B', C'D', D'E', F'A'$  得到底面正六边形  $ABCDEF$  的直观图  $A'B'C'D'E'F'$ .

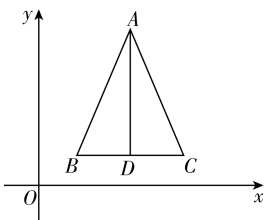
(2)画顶点. 在  $z'$  轴的正半轴上任意选取一点为  $P'$ .

(3)成图. 连接  $P'A', P'B', P'C', P'D', P'E', P'F'$ , 并擦去  $x'$  轴,  $y'$  轴,  $z'$  轴, 加以整理(将被遮挡的线改为虚线), 便得到正六棱锥  $P-ABCDEF$  的直观图  $P'-A'B'C'D'E'F'$  (如图③所示).



图③

**8. AC 【解析】**根据斜二测画法的直观图, 还原几何图形, 如图. 首先建立平面直角坐标系  $xOy$ ,  $BC \parallel x$  轴, 并且  $BC = B'C'$ ,  $D$  是  $BC$  的中点, 并且作  $AD \parallel y$  轴, 即  $AD \perp BC$ , 且  $AD = 2A'D'$ , 连接  $AB, AC$ , 所以  $\triangle ABC$  是等腰三角形, 则  $AB = AC$ ,  $AB$  的长度大于  $AD$  的长度, 由斜二测画法法则可知  $BC = B'C'$ ,  $AD = 2A'D'$ , 观察题图,  $A'D' > \frac{1}{2}B'C'$ , 所以  $B'C' < 2A'D'$ , 即  $BC < AD$ .



## 11.1.2 构成空间几何体的基本元素

### 题型诀

**1-1. C 【解析】**由图可知, 该几何体有 4 个顶点, 6 条棱, 4 个面.

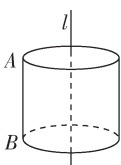
**1-2. 【解】**题图①所示的几何体由 8 个顶点, 12 条棱和 6 个面构成. 题图②所示的几何体由 12 个顶点, 18 条棱和 8 个面构成.

**2-1. B 【解析】**A 中, 手表分针的转动说明的是“线动成面”; B 中, 旋转一扇门, 门的运动说明的是“面动成体”;

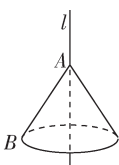


C 中,乒乓球在空中的飞行说明的是“点动成线”;D 中,用铅笔在纸上画圆,笔尖的运动说明的是“点动成线”. 故选 B.

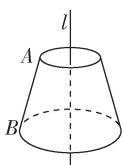
**2-2. 【解】**线的运动可以形成平面或曲面,观察  $AB$  和  $l$  的位置关系及旋转的方式和方向,画出图形如图所示.



①



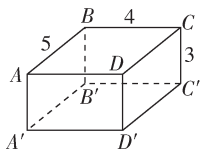
②



③

**3-1. AC 【解析】**B 中,  $AC$  与  $BC_1$  既不平行也不相交; D 中, 与  $AB$  平行的平面有两个, 分别为平面  $A_1B_1C_1D_1$  和平面  $CDD_1C_1$ .

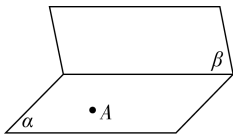
**3-2. (1) 3 (2) 4 (3) 5 【解析】**如图, 在长方体  $ABCD-A'B'C'D'$  中,  $AB = 5$  cm,  $BC = 4$  cm,  $CC' = 3$  cm,



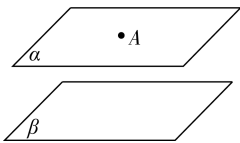
$\therefore$  长方体的高为 3 cm; 平面  $A'B'BA$  与平面  $CDD'C'$  之间的距离为 4 cm; 点  $A$  到平面  $BCC'B'$  的距离为 5 cm.

**4-1. C 【解析】**结合图形可以得出平面  $\alpha, \beta$  相交于直线  $m$ , 直线  $n$  在平面  $\alpha$  内, 直线  $m, n$  相交于点  $A$ , 结合选项可得 C 正确.

**4-2. 【解】**(1)  $A \in \alpha, A \notin \beta$ , 如图①②所示.

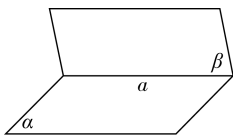


图①



图②

(2)  $a \subset \alpha, a \subset \beta$ , 如图③所示.





图③

## 巩固练

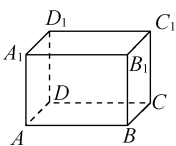
1. **D** 【解析】三角形、平行四边形、梯形都是平面图形, 四边相等的四边形可能是空间四边形.

2. **D** 【解析】由平面的表示方法可知, ③④错误.

3. **D** 【解析】由点、线、面之间的位置关系可判断  $P$  与  $\alpha$  关系不确定,  $Q \in \alpha$ .

4. ①③ 【解析】由直线在平面外的位置关系可知①正确; 直线  $l$  在平面  $\alpha$  内用符号“ $\subset$ ”表示, 即  $l \subset \alpha$ , ②错误; 由  $a$  与  $b$  相交,  $a \subset \alpha$ ,  $b \subset \beta$  知两个平面有公共点, 一定相交, 故③正确.

5. (1) 5 cm (2) 6 cm  
(3) 4 cm



【解析】如图, 在长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$

中, (1) 因为平面  $ABCD$  为底面, 所以高为棱  $AA_1$  的长度, 即矩形  $ABCD$  在铅垂线上平移的距离, 为 5 cm; (2) 平面  $ADD_1A_1 \parallel$  平面  $BB_1C_1C$ , 平面  $ADD_1A_1$  与平面  $BB_1C_1C$  间的距离为棱  $AB$  的长度, 为 6 cm; (3) 因为棱  $B_1C_1 \perp$  平面  $CC_1D_1D$ , 所以点  $B_1$  到平面  $CC_1D_1D$  的距离即为棱  $B_1C_1$  的长度, 也是棱  $AD$  的长度, 为 4 cm.

6. **7** 【解析】长方体中一共有 12 条棱, 除去与棱  $A_1B_1$  相交的 4 条棱和它本身外, 其余 7 条棱与棱  $A_1B_1$  不相交.

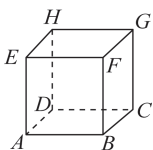
7. **C** 【解析】由长方体的面的定义可知①正确. 在长方体中, 相对的两个面互相平行, 每个面有 4 条棱, 所以②正确. 在长方体中, 和任意一条棱相交的棱有 4 条, 和任意一条棱不相交的棱有 7 条, 所以③错误. 在长方体中, 相对的两个面互相平行, 且这对平行面之间的距离是定值, 所以面上任一点到对面的距离相等, ④正确. 在长方体中, 与一个面平行的面有 1 个, 与这个面垂直的面有 4 个, 所以⑤正确.

8. **C** 【解析】在长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$



中,  $AC \parallel$  平面  $A_1B_1C_1D_1$ , A 正确. 在长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $AA_1 \perp AC$ , B 正确. 在长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $AA_1$  和  $CD$  既不相交也不平行, C 错误. 在长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $CD \perp$  平面  $BCC_1B_1$ , D 正确.

9. 【解】(1) 如图所示.



(2) 直线  $AB \parallel$  平面  $EFGH$ .

(3) 直线  $CD \perp$  平面  $ADE$ .

(4) 直线  $AE$  与直线  $CD$  异面.

10. B 【解析】①正方体的每一条棱, 都与两个侧面垂直, 可得 2 个“正交线面对”. 正方体共 12 条棱, 可得“正交线面对”  $2 \times 12 = 24$  个.

②正方体的每一条面对角线, 都与一个对角面垂直, 可得 1 个“正交线面对”. 正方体共 12 条面对角线, 可得“正交线面对”  $1 \times 12 = 12$  个.

③不存在与包含正方体的四个顶点的平面与正方体的体对角线垂直.

综上, 共有  $24 + 12 = 36$  个.

### 11.1.3 多面体与棱柱+

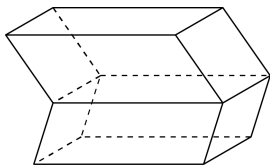
### 11.1.4 棱锥与棱台

#### 题型诀

1-1. ABC 【解析】根据棱柱的定义可知棱柱的两个底面平行且全等, 故 A 正确;

根据棱柱的定义可知棱柱的两个底面平行且全等, 侧棱均平行, 故 B 正确;

棱柱底面至少为三角形, 故棱柱至少有 2 个底面和 3 个侧面, 即 5 个面, 故 C 正确; 如图所示,



该几何体满足有两个面互相平行且其余各面都是四边形,但该几何体不是棱柱,故 D 错误.

故选 ABC.

**2-1. A 【解析】**①错误,由五个面围成的多面体可能是三棱柱;

②错误,仅有两个面互相平行的五面体可以是三棱柱;

③④错误,棱台的侧棱延长线必须交于一点. 故选 A.

**2-2. A 【解析】**A. 根据正三棱锥的定义可知,正三棱锥的底面是正三角形,三个侧面是全等的等腰三角形,

所以一个三棱锥是正三棱锥的充要条件是底面是正三角形,三个侧面是全等的等腰三角形,

所以该选项符合题意.

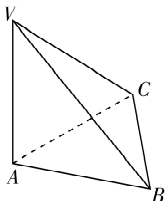
B. 各个面都是正三角形,则三棱锥是正三棱锥,所以各个面都是正三角形是三棱锥为正三棱锥的充分条件;

如果三棱锥是正三棱锥,则各个面不一定是正三角形,所以各个面都是正三角形是三棱锥为正三棱锥的非必要条件,

故该选项不符合题意.

C. 三个侧面是全等的等腰三角形的三棱锥不一定是正三棱锥,如图所示, $VA=VC=BC=AB$ , $AC=VB$ 时,三棱锥  $V-ABC$  不一定是正三棱锥,

故该选项不符合题意.





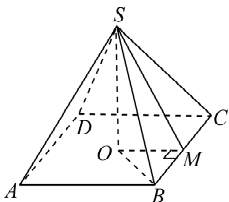
D. 顶点在底面上的射影为重心, 设底面为直角三角形  $ABC$ , 其重心为  $O$ , 过点  $O$  作平面  $ABC$  的垂线  $OV$ , 连接  $VA, VB, VC$  得到三棱锥  $V-ABC$ ,

显然三棱锥  $V-ABC$  不是正三棱锥,

所以该选项不符合题意.

**2-3. B** 【解析】根据棱锥的结构特征可知, 剩余部分是四棱锥  $A'-BCC'B'$ .

**3-1. 【解】**如图, 在正四棱锥  $S-ABCD$  中,  $SO \perp$  底面  $ABCD$  于点  $O$ , 则  $O$  是底面的中心,  $\angle OSB$  是侧棱  $SB$  与高  $SO$  所成的角, 故  $\angle OSB = 30^\circ$ .



由题意知  $OB = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ , 则  $SB = 2OB = \sqrt{2}a$ ,

$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}a.$$

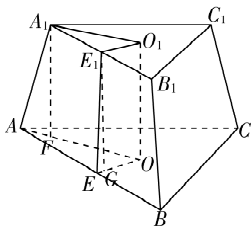
过点  $O$  作  $OM \perp BC$  于  $M$ , 连接  $SM$ , 则  $SM \perp BC$ .

在  $\text{Rt}\triangle SOM$  中, 可求得  $SM = \frac{\sqrt{7}}{2}a$ ,

所以正四棱锥的侧棱长为  $\sqrt{2}a$ , 斜高为  $\frac{\sqrt{7}}{2}a$ .

**3-2. 【解】**如图, 正三棱台  $ABC-A_1B_1C_1$  中, 高  $OO_1 = 3$ , 底面边长为  $A_1B_1 = 2$ ,  $AB = 4$ ,

$$\text{故 } OA = \frac{\sqrt{3}}{3}AB = \frac{4\sqrt{3}}{3}, O_1A_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}A_1B_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$





$$\text{侧棱长 } AA_1 = \sqrt{3^2 + \left( \frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \right)^2} = \frac{\sqrt{93}}{3}.$$

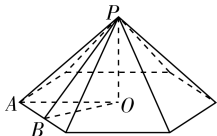
$$\text{又 } OE = \frac{2\sqrt{3}}{3}, O_1E_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{斜高 } EE_1 = \sqrt{3^2 + \left( \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2} = \frac{2\sqrt{21}}{3}.$$

**4-1. C** 【解析】因为底面  $ABCD$  的直观图是边长为 1 的正方形, 所以底面  $ABCD$  是两邻边分别为 1 与 3 的平行四边形, 设底为 1, 则高为  $2\sqrt{2}$ , 底面周长是  $1+3+1+3=8$ , 面积是  $1 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ .

所以直四棱柱的表面积是  $8 \times 2 + 2 \times 2\sqrt{2} \times 2 = 16 + 4\sqrt{2}$ .

故选 C.

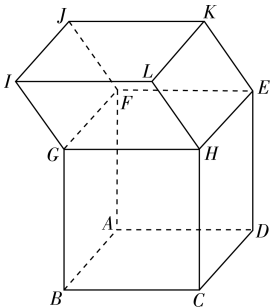
**4-2. 12** 【解析】如图, 由题意可知  $OA = 2, OP = 1, OB = \sqrt{3}$ , 所以  $PB = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = 2$ , 所以正六棱锥的侧面积为  $6 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 12$ .



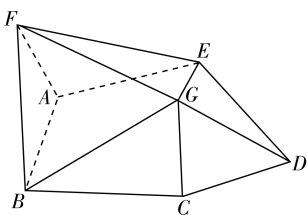
### 巩固练

**1. C** 【解析】对于 A, 如图①所示的几何体中, 平面  $ABCD \parallel$  平面  $JILK$ , 其余各面都是平行四边形, 显然不是棱柱, 故 A 错误;

对于 B, 如图②, 多边形  $ABCDE$  是平面多边形, 其余各面都是三角形, 显然不是棱锥, 故 B 错误;



图①



图②

对于 C, 多面体至少有四个面, 故 C 正确;

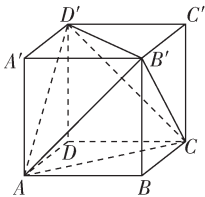
对于 D, 一个正方形按不同方向平移所得几何体, 可能是正方体, 也可能是长方体或斜四棱柱, 故 D 错误. 故选 C.

2. **B** 【解析】如图, 三棱锥  $B'-ACD'$  为符合条件的三棱锥, 四个面为全等的等边三角形, 设正方体的棱长为 1, 则

$$B'C = \sqrt{2}, S_{\triangle B'AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ 三棱锥的表面积}$$

$$S_{\text{锥}} = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}, \text{ 又正方体的表面积}$$

$$S_{\text{正}} = 6.$$



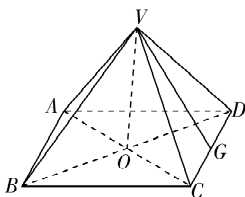
$$\text{因此 } S_{\text{锥}} : S_{\text{正}} = 2\sqrt{3} : 6 = 1 : \sqrt{3}.$$

3. **C** 【解析】因为截面面积与底面面积之比为  $1:2$ , 且面积比与相似比是平方的关系, 故平面截取后小棱锥与大棱锥的相似比为  $1:\sqrt{2}$ .

故小棱锥与大棱锥的高比值也为  $1:\sqrt{2}$ , 故大棱锥的高被分成的上、下两段之比为  $1:(\sqrt{2}-1)$ .

4. **24** 【解析】直四棱柱底面是边长为 2 cm 的菱形, 且 4 个侧面全等,  $\therefore$  该直四棱柱的侧面积为  $4 \times 2 \times 3 = 24 (\text{cm}^2)$ .

5.  $2\sqrt{3}$   $2\sqrt{2}$  【解析】如图所示, 正四棱锥  $V-ABCD$  的底面面积为 16, 则底面边长为 4.  $G$  为  $CD$  的中点, 在等边三角形  $VCD$  中,  $VG = \frac{\sqrt{3}}{2}VC = 2\sqrt{3}$ ,



$V$  在平面  $ABCD$  的射影为正方形  $ABCD$  的中心  $O$ ,

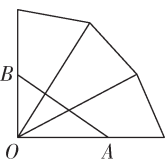
$$DO = \frac{1}{2}DB = 2\sqrt{2}, VO = \sqrt{VD^2 - DO^2} = 2\sqrt{2}. \text{ 故斜高与高分别为 } 2\sqrt{3}, 2\sqrt{2}.$$

6. 【解】作出三棱锥的侧

面展开图, 如图  $A, B$

两点间最短绳长就是

线段  $AB$  的长度.



在  $\triangle AOB$  中,  $\angle AOB = 90^\circ$ ,

$OA = 4 \text{ cm}, OB = 3 \text{ cm}$ ,

所以  $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 5(\text{cm})$ . 所以此绳在  $A, B$  两点间的最短绳长为  $5 \text{ cm}$ .

7. C 【解析】根据题意知阳马的最长棱为长方体的体对角线,  $\therefore$  最长棱长为

$$\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}.$$

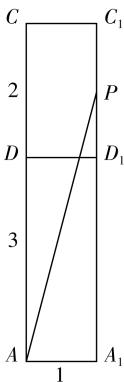
8.  $\sqrt{13}$   $\frac{3\sqrt{22}}{4}$  【解析】如图①所

示, 当质点经过棱  $DD_1$  时,  $AP =$

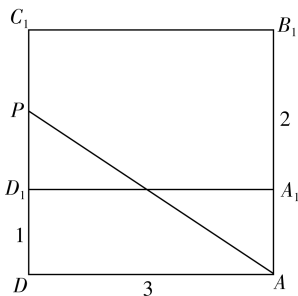
$$\sqrt{AA_1^2 + A_1P^2} = \sqrt{1^2 + (3+1)^2} = \sqrt{17};$$

如图②所示, 当质点经过棱  $A_1D_1$  时,

$$AP = \sqrt{AD^2 + DP^2} = \sqrt{3^2 + (1+1)^2} = \sqrt{13};$$



图①



图②

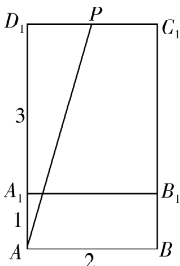
如图③所示, 当质点经过棱  $A_1B_1$  时,

$$AP = \sqrt{AD_1^2 + D_1P^2} = \sqrt{(1+3)^2 + 1^2} = \sqrt{17}. \text{ 所以最短距离为 } \sqrt{13}.$$

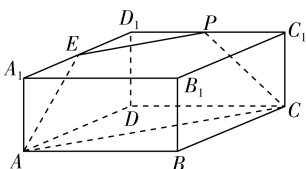
此时质点从点  $A$  出发, 经过  $A_1D_1$  的中点  $E$ , 再到达点  $P$ , 则平面  $AEP$  截长方



体所得的截面为梯形  $ACPE$ , 如图④所示.



图③



图④

由已知得  $AC = \sqrt{13}$ ,  $EP = \frac{\sqrt{13}}{2}$ ,  $AE = \frac{\sqrt{13}}{2}$ ,  $PC = \sqrt{2}$ .

如图⑤, 过点  $E, P$  分别作  $AC$  的垂线, 垂足分别为  $M, N$ ,

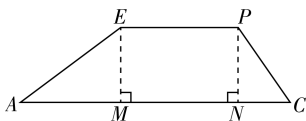
设  $EM = NP = h$ , 且  $MN = EP = \frac{\sqrt{13}}{2}$ ,

故  $\sqrt{AE^2 - EM^2} + MN + \sqrt{PC^2 - PN^2} = AC$ ,

即  $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 - h^2} + \frac{\sqrt{13}}{2} + \sqrt{(\sqrt{2})^2 - h^2} = \sqrt{13}$ , 解得  $h = \sqrt{\frac{22}{13}}$ .

故截面面积  $S = \frac{1}{2}(EP + AC) \cdot h = \frac{1}{2} \times$

$\left(\frac{\sqrt{13}}{2} + \sqrt{13}\right) \times \sqrt{\frac{22}{13}} = \frac{3\sqrt{22}}{4}$ .



图⑤

9. **B** 【解析】设正五边形面有  $x$  个, 共  $5x$  条棱, 正六边形面有  $y$  个, 共  $6y$  条棱,

因为每条棱出现在两个面中, 所以总

棱数  $E = \frac{5x + 6y}{2}$ ,

因为每个顶点出现在三个面中,

所以总顶点数  $V = \frac{5x + 6y}{3} = 60$ , 得  $5x +$



$$6y = 180,$$

$$\text{所以 } E = \frac{5x+6y}{2} = \frac{180}{2} = 90,$$

所以由欧拉公式  $V - E + F = 2$  得,  $60 - 90 + F = 2$ , 得  $F = 32$ ,

$$\text{所以 } x + y = 32,$$

$$\text{所以由 } \begin{cases} x+y=32, \\ 5x+6y=180, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x=12, \\ y=20, \end{cases}$$

所以碳 60 的所有面中正六边形的个数为 20, 故选 B.

## 11.1.5 旋转体

### 易错记

**1-1. 【解】**题图①和题图②都是绕直角三角形的直角边所在的直线旋转, 得到的几何体是圆锥. 题图③是绕直角三角形的斜边所在的直线旋转, 得到的几何体是两个同底相对的圆锥. 题图④是绕直角三角形斜边上的高所在的直线旋转, 旋转  $180^\circ$  得到的几何体是两个不同的半圆锥, 旋转  $360^\circ$  得到的几何体是一个圆锥内部套一个圆锥.

### 题型诀

**1-1. D 【解析】**①错误, 圆台是直角梯形绕其直角边所在直线或等腰梯形绕其两底边的中点连线旋转形成的; ②正确; ③错误, 球是以半圆的直径所在直线为轴旋转一周形成的旋转体; ④正确.

**1-2. 【解】**(1) 轴截面  $SAB$  的面积为

$$\frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times SO = 4\sqrt{3},$$

所以  $SO = 2$ .

所以圆锥  $SO$  的母线长  $l = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$ .

(2) 在轴截面  $SAB$  中,  $SO = 2$ ,  $SA = 4$ ,

$$\text{所以 } \angle SAB = \frac{\pi}{6}, \angle ASB = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{设 } \angle BSC = \theta, \text{ 则 } 0 < \theta \leq \frac{2\pi}{3},$$

$$\text{所以 } \triangle SBC \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} l^2 \sin \theta = 8 \sin \theta,$$

所以当  $\theta = \frac{\pi}{2}$  时, 截面  $SBC$  面积有最大值, 最大值为 8.

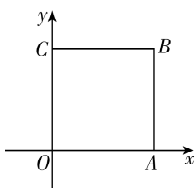
**2-1. C 【解析】**作出圆柱的轴截面的原



图形,如图,由题可知圆柱的底面半径

为  $\frac{1}{2}OA = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 高为

$OC = \sqrt{2}$ , 所以该圆



柱的表面积为  $2\pi \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \pi \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 3\pi$ .

**3-1. C** 【解析】设圆锥的底面半径为  $r$ , 母线长为  $l$ , 侧面展开图扇形的圆心角为  $\theta$ , 根据条件得  $\pi rl + \pi r^2 = 3\pi r^2$ , 即  $l = 2r$ .

又由弧长公式得  $\frac{\theta\pi l}{180^\circ} = 2\pi r$ , 解得  $\theta = 180^\circ$ . 故选 C.

**3-2. A** 【解析】设圆锥的底面半径为  $r$ , 高为  $h$ , 母线长为  $l$ ,

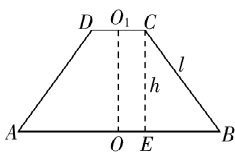
由题可知,  $r = h = \frac{\sqrt{2}}{2}l$ , 则  $\frac{1}{2} \times (\sqrt{2}r)^2 = 1$ ,

$\therefore r = 1, l = \sqrt{2}$ , 侧面积为  $\pi rl = \sqrt{2}\pi$ .

**4-1. B** 【解析】由题意可得更换两个灯罩需要的丝绸材质布料面积  $S = 2\pi(10 + 18) \times 17 = 952\pi(\text{cm}^2)$ . 故选 B.

**4-2. C** 【解析】

由题意知, 先画轴截面, 再利用上、下底面半径



和高的比求解. 圆台的轴截面如图所示,

$O_1, O$  分别为轴截面上、下底的中点, 连接  $O_1O$ , 过点  $C$  作  $CE \perp AB$ , 垂足为  $E$ . 设

上底面半径为  $r$ , 下底面半径为  $R$ , 高为  $h$ , 则  $r : R : h = 1 : 4 : 4$ , 则它的母线长为  $l =$

$\sqrt{h^2 + (R - r)^2} = \sqrt{(4r)^2 + (3r)^2} = 5r = 10$ ,

所以  $r = 2, R = 8$ .

故  $S_{\text{侧}} = \pi(R + r)l = \pi(8 + 2) \times 10 = 100\pi$ ,

$S_{\text{表}} = S_{\text{侧}} + \pi r^2 + \pi R^2 = 100\pi + 4\pi + 64\pi = 168\pi$ .

**5-1. B** 【解析】设两球的半径分别为

$r_1, r_2$ , 表面积分别为  $S_1, S_2$ ,  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{4\pi r_1^2}{4\pi r_2^2} =$

$\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{4}{9}$ .

**5-2. 2:3** 【解析】设球的半径为  $R$ , 则圆柱的底面半径为  $R$ , 高为  $2R$ ,



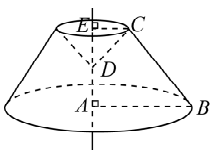
$$\therefore S_{\text{圆柱}} = 2\pi R \cdot 2R + 2\pi R^2 = 6\pi R^2,$$

$$S_{\text{球}} = 4\pi R^2,$$

$$\therefore S_{\text{球}} : S_{\text{圆柱}} = 4\pi R^2 : 6\pi R^2 = 2 : 3.$$

**6-1. C** 【解析】根据封闭几何体的直观图,可得该几何体是一个圆柱挖去一个半球,其中圆柱的底面圆的半径为 1 cm,母线长为 3 cm,球的半径为 1 cm,所以该几何体的表面积为  $S = 2\pi \times 1 \times 3 + \pi \times 1^2 + \frac{1}{2} \times 4\pi \times 1^2 = 9\pi (\text{cm}^2)$ . 故选 C.

**6-2. 【解析】** 四边形  $ABCD$  绕  $AD$  旋转一周所成的几何体为棱台去掉一个圆锥. 如图所示.



因为  $\angle ADC = 135^\circ$ , 所以  $\angle EDC = 45^\circ$ .

又因为  $CD = 2\sqrt{2}$ , 所以  $ED = EC = 2$ .

所以  $S_{\text{表}} = S_{\text{圆台下底面}} + S_{\text{圆台侧面}} + S_{\text{圆锥侧面}}$

$$= \pi \cdot AB^2 + \pi (EC + AB) \cdot BC + \pi \cdot EC \cdot CD$$

$$= \pi \times 5^2 + \pi \times (2 + 5) \times 5 + \pi \times 2 \times 2\sqrt{2}$$

$$= 25\pi + 35\pi + 4\sqrt{2}\pi$$

$$= (4\sqrt{2} + 60)\pi.$$

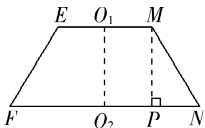
**7-1. B** 【解析】当截面过旋转轴时,圆锥的轴截面为等腰三角形,此时①符合条件;当截面不过旋转轴时,此时⑤符合条件. 故截面图形可能是①⑤. 故选 B.

**7-2. D** 【解析】用一个平面去截一个几何体,得到的截面是一个圆面,则这个几何体可能是圆锥,也可能是圆柱,也可能是球体. 故选 D.

**8-1. C** 【解析】如

图为圆台轴截面,

$O_1, O_2$  分别为上、



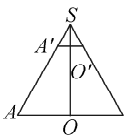
下底的中点,连接  $O_1O_2$ , 过点  $M$  作  $MP \perp$

$NO_2$  于点  $P$ . 由题意,  $MN = 4, O_1M = 2$ ,

$$O_2N = 4, \therefore NP = 2, \therefore MP = \sqrt{MN^2 - NP^2} =$$

$$\sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}. \text{ 故选 C.}$$

**8-2. 12** 【解析】设圆台的上底面半径为  $r$ , 圆锥的母线长为  $l$ , 则圆台的下底面的半径为  $4r$ , 轴截面中的相





似三角形如图,  $\triangle SO'A' \sim \triangle SOA$ , 所以

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{O'A'}{OA}, \text{ 即 } \frac{l-9}{l} = \frac{r}{4r}, \text{ 解得 } l=12.$$

**9-1. B** 【解析】由题意, 得任意两点与球心所在截面圆中, 该两点所在弦对应的圆心角为  $\frac{\pi}{3}$ .

若球的半径为  $R$ , 则任意两点所在弦的弦长相等且为  $R$ ,

所以三个点所成三角形是边长为  $R$  的等边三角形, 故其外接圆的半径  $r = \frac{R}{\sqrt{3}}$ , 故

$$2\pi r = \frac{2R}{\sqrt{3}}\pi = 4\pi, \text{ 则 } R = 2\sqrt{3}.$$

所以球面的面积为  $4\pi R^2 = 48\pi$ . 故选 B.

**9-2.  $80\pi$**  【解析】设球半径为  $R$ , 球心  $O$  到上底面距离为  $x$ , 则球心到下底面距离为  $6-x$ , 结合勾股定理, 建立等式  $R^2 = 2^2 + x^2 = 4^2 + (6-x)^2$ , 解得  $x=4$ , 所以半径  $R^2 = x^2 + 2^2 = 20$ , 因而球  $O$  表面积  $S = 4\pi R^2 = 80\pi$ .

**10-1. C** 【解析】设圆锥的底面半径为  $r$ , 侧面展开图如图所示, 由图可知  $B$  为  $SA$  的中点,  $A_1B$  为所求长度的最小值.

由于母线长为  $6\text{ m}$ , 则  $SA = 6$ , 又圆锥的侧面积为  $12\pi\text{ m}^2$ ,

所以由圆锥的侧面积公式可得  $12\pi = \pi r \cdot SA$ , 解得  $r=2$ ,

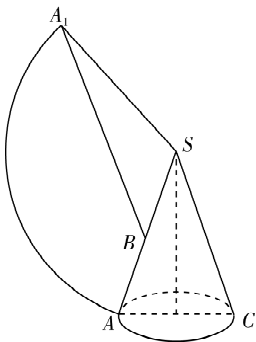
所以底面圆的周长, 即圆锥侧面展开图的弧长为  $4\pi$ ,

$$\text{又 } 4\pi = 6\angle A_1SB, \text{ 所以 } \angle A_1SB = \frac{2\pi}{3}.$$

在  $\triangle A_1SB$  中, 由余弦定理可得

$$\cos \angle A_1SB = \frac{A_1S^2 + SB^2 - A_1B^2}{2A_1S \cdot SB} =$$

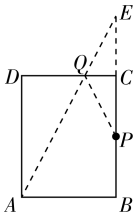
$$\frac{6^2 + 3^2 - A_1B^2}{2 \times 6 \times 3} = -\frac{1}{2}, \text{ 解得 } A_1B = 3\sqrt{7}\text{ m (负值舍去). 故选 C.}$$





## 巩固练

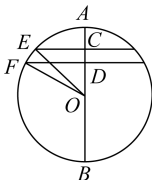
1. **C** 【解析】题图①所示的几何体不是由棱锥截来的,所以不是棱台;  
题图②所示的几何体中上、下两个底面不平行,所以不是圆台;  
题图③所示的几何体是棱锥;  
题图④所示的几何体中前、后两个面平行,其他面是四边形,且每相邻两个四边形的公共边平行,所以是棱柱. 故选 C.
2. **B** 【解析】①中当圆锥过顶点的轴截面是钝角等腰三角形时,在过顶点的所有截面三角形中,两腰均为圆锥母线,当且仅当两腰垂直即两条母线垂直时,截面面积最大;③圆台的两个底面一定平行,故①③错误.
3. **B** 【解析】因为圆柱的轴截面是矩形,由题意知该矩形的长是母线长 5,宽为底面圆的直径 4,所以轴截面的面积为  $4 \times 5 = 20$ ,故选 B.
4. **C** 【解析】由题意及棱柱和圆柱的侧面积公式,以及三角形和圆的面积公式,可得剩余几何体的底面积为  $S_{\text{底}} = 2 \left( \pi - \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \right) = 2\pi - 2$ ,  
剩余几何体的侧面积为  $S_{\text{侧}} = (2\sqrt{2} + 2) \times 3 + 2\pi \times 3 = 6\sqrt{2} + 6 + 6\pi$ ,  
故剩余几何体的表面积为  $S_{\text{底}} + S_{\text{侧}} = 8\pi + 4 + 6\sqrt{2}$ .
5. **A** 【解析】依题意可得,圆柱的底面半径  $r = 1$ ,高  $h = 4$ ,将圆柱的侧面(一半)展开后得矩形  $ABCD$ ,其中  $AB = \pi$ , $AD = 4$ ,问题转化为在  $CD$  上找一点  $Q$ ,使  $AQ + PQ$  最短. 作点  $P$  关于  $CD$  的对称点  $E$ ,连接  $AE$ ,令  $AE$  与  $CD$  交于点  $Q$ ,连接  $PQ$ ,则  $AQ + PQ$  的最小值即为  $AE$ ,  $AE = \sqrt{\pi^2 + (4+2)^2} = \sqrt{\pi^2 + 36}$ .



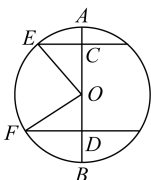
6. **2 或 14** 【解析】画出与截面垂直的球



的大圆,如图所示.



图①



图②

设球的大圆为圆  $O$ , 点  $C, D$  分别为两截面圆的圆心,  $AB$  为经过点  $C, O, D$  的直径. 由题中条件可得两截面圆的半径分别为 6 和 8. 在  $\text{Rt}\triangle COE$  中,  $OC = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ . 在  $\text{Rt}\triangle DOF$  中,  $OD = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ .

如图①所示, 当两截面在球心的同侧时, 两截面间的距离  $CD = OC - OD = 2$ ; 如图②所示, 当两截面在球心的异侧时, 两截面间的距离  $CD = OC + OD = 14$ . 综上可知, 两截面间的距离是 2 或 14.

7. **D** 【解析】由已知得  $l = 2r$  ( $r$  为圆锥底面半径,  $l$  为圆锥的母线长), 所以

$$\frac{S_{\text{侧}}}{S_{\text{底}}} = \frac{\pi r l}{\pi r^2} = \frac{l}{r} = 2.$$

8. **B** 【解析】 $\because \triangle ADE$  和  $\triangle BCF$  都是边长为 2 的等边三角形,  $EF \parallel AB$ ,

$\therefore$  侧面  $ABFE, CDEF$  是等腰梯形, 且两等腰梯形全等, 易得等腰梯形的高为  $\sqrt{3}$ ,

$$\therefore S_{\text{梯形}ABFE} = S_{\text{梯形}CDEF} = \frac{1}{2} \times (2+4) \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}.$$

$$\text{又} \because S_{\triangle BCF} = S_{\triangle ADE} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \sqrt{3},$$

$$S_{\text{矩形}ABCD} = 4 \times 2 = 8,$$

$$\therefore \text{几何体的表面积 } S = 3\sqrt{3} \times 2 + \sqrt{3} \times 2 + 8 = 8 + 8\sqrt{3}.$$

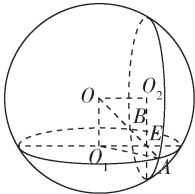
故选 B.

9. **B** 【解析】如图

所示,

设两圆的圆心分别为  $O_1, O_2$ , 球心为  $O$ , 公共弦为

$AB$ ,  $AB$  的中点为  $E$ . 因为球心到这两个平面的距离相等, 且两圆的半径相





等. 所以四边形  $OO_1EO_2$  为正方形, 设两圆半径为  $r$ , 所以  $|OO_1| = \sqrt{16-r^2}$ ,  $|OE| = \sqrt{2}|OO_1| = \sqrt{32-2r^2}$ , 已知  $|AE| = \frac{1}{2}|AB| = \sqrt{2}$ ,  $|OE|^2 + |AE|^2 = |OA|^2$ , 所以  $32-2r^2+2=16$ , 则  $r^2=9$ , 所以  $r=3$ , 所以这两个圆的半径之和为 6. 故选 B.

10. 【解】(1) 由截得的圆

台  $OO'$  上、下底面面

积之比为  $1:16$ , 可设

截得的圆台  $OO'$  上、

下底面的半径分别为  $r, 4r$ .

过圆锥轴  $SO$  作截面, 如图所示.

则  $\triangle SO'A' \sim \triangle SOA$ ,  $O'A' = 3 \text{ cm}$ ,

$$\therefore \frac{O'A'}{OA} = \frac{SA'}{SA} = \frac{1}{4}, \therefore OA = 12 \text{ cm}.$$

又  $SO = 24 \text{ cm}$ ,

$$\therefore SA = \sqrt{12^2 + 24^2} = 12\sqrt{5} (\text{cm}), SA' =$$

$$\frac{1}{4}SA = 3\sqrt{5} (\text{cm}),$$

即  $AA' = 9\sqrt{5} \text{ cm}$ , 故圆台的母线长为  $9\sqrt{5} \text{ cm}$ .

(2) 如图, 过正方体

的体对角线作圆锥的

轴截面, 设正方体的

棱长为  $x$ , 则  $OC = \frac{\sqrt{2}}{2}x$ ,

$\therefore$  由  $\triangle SED \sim \triangle SOA$  得,  $\frac{ED}{OA} = \frac{SE}{SO}$ , 即

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}x}{12} = \frac{24-x}{24}, \text{解得 } x = 24(\sqrt{2}-1),$$

$\therefore$  正方体的棱长为  $24(\sqrt{2}-1) \text{ cm}$ .

11. AB 【解析】如果是绕直角边旋转,

形成圆锥, 则圆锥底面半径为  $r=1$ ,

高为  $h=1$ , 母线  $l$  就是直角三角形的

斜边  $\sqrt{2}$ , 所以所形成的几何体的表面

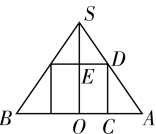
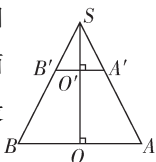
$$\text{积 } S = \pi rl + \pi r^2 = \pi \times 1 \times \sqrt{2} + \pi \times 1^2 =$$

$$(\sqrt{2}+1)\pi.$$

如果绕斜边旋转, 形成的是上下两个

圆锥, 圆锥的半径是直角三角形斜边

的高  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 两个圆锥的母线  $l$  都是直角





三角形的直角边 1,

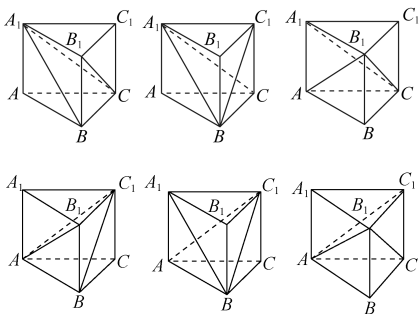
所以形成的几何体的表面积  $S = 2 \times$

$$\pi r l = 2 \times \pi \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 = \sqrt{2} \pi.$$

综上,可知形成的几何体的表面积是

$$(\sqrt{2}+1)\pi \text{ 或 } \sqrt{2}\pi.$$

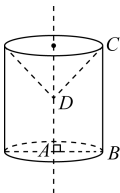
**12. 【解】**一个三棱柱可以分割成三个三棱锥,有如下六种方案:



### 11.1.6 祖暅原理与几何体的体积

#### 易错记

**1-1. C 【解析】**把梯形  $ABCD$  绕直线  $AD$  旋转一周而形成的曲面围成的几何体是底面半径为 1, 高



为 2 的圆柱挖去底面半径为 1, 高为 1 的圆锥后剩下的部分, 如图所示, 故所求几

何体的体积为  $2\pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{5\pi}{3}$ , 故选 C.

**2-1.  $\frac{2}{3}$  【解析】**设点  $P$  到平面  $ABC$ , 平面  $A_1B_1C_1$  的距离分别为  $h_1, h_2$ , 则棱柱的高为  $h = h_1 + h_2$ , 又记  $S = S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A_1B_1C_1}$ , 则三棱柱的体积  $V = Sh = 1$ . 而从三棱柱中去掉四棱锥  $P-ACC_1A_1$  的剩余

体积  $V' = V_{P-ABC} + V_{P-A_1B_1C_1} = \frac{1}{3}Sh_1 +$

$\frac{1}{3}Sh_2 = \frac{1}{3}S(h_1 + h_2) = \frac{1}{3}$ , 从而

$$V_{P-ACC_1A_1} = V - V' = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

#### 题型诀

**1-1. D 【解析】**已知圆柱的高等于 1, 侧面积等于  $4\pi$ , 设圆柱的底面半径为  $r$ , 根据圆柱的侧面积公式得  $2\pi r \times 1 = 4\pi$ , 故  $r = 2$ , 则圆柱的体积  $V = \pi r^2 h = \pi \times 2^2 \times 1 = 4\pi$ .



**1-2. C** 【解析】因为甲、乙两个圆柱的

底面面积分别为  $S_1, S_2$ , 且  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{16}{9}$ ,

所以甲、乙两个圆柱的底面半径  $R_1, R_2$

满足  $\frac{R_1}{R_2} = \frac{4}{3}$ ,

所以甲、乙两个圆柱的底面周长  $C_1, C_2$

满足  $\frac{C_1}{C_2} = \frac{4}{3}$ .

又因为甲、乙两个圆柱的侧面积相等, 所以

甲、乙两个圆柱的高  $H_1, H_2$  满足  $\frac{H_1}{H_2} = \frac{3}{4}$ ,

所以甲、乙两个圆柱的体积  $V_1, V_2$  满足

$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1 H_1}{S_2 H_2} = \frac{16}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{4}{3}$ . 故选 C.

**1-3.  $12\sqrt{3}$  或  $24\sqrt{3}$**  【解析】因为正三棱

柱的侧面展开图是边长分别为 6 和 12 的矩形, 所以有以下两种情况,

① 6 是下底面的周长, 12 是三棱柱的高, 此时, 下底面的边长为 2, 面积为  $\sqrt{3}$ , 所以正三棱柱的体积为  $12\sqrt{3}$ .

② 12 是下底面的周长, 6 是三棱柱的高, 此时, 下底面的边长为 4, 面积为  $4\sqrt{3}$ , 所以正三棱柱的体积为  $24\sqrt{3}$ .

**2-1. A** 【解析】三棱锥  $D-ACD_1$  的体积

$$V_{D-ACD_1} = V_{D_1-ACD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ADC} \cdot D_1D = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DC \cdot D_1D = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

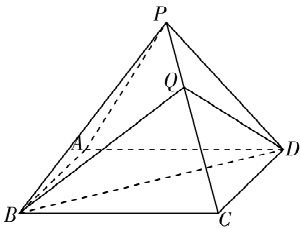
**2-2. D** 【解析】依题意画出图形如图所示, 因为底面  $ABCD$  为平行四边形, 所以

$$V = V_{P-ABCD} = 2V_{P-BCD}.$$

因为  $\vec{PC} = 3\vec{PQ}$ , 所以  $V_{Q-BCD} = \frac{2}{3} V_{P-BCD}$ ,

$$\text{则 } V_{Q-PBD} = V_{P-BCD} - V_{Q-BCD} = \frac{1}{3} V_{P-BCD} =$$

$$\frac{1}{6} V_{P-ABCD} = \frac{V}{6}.$$



**3-1. C** 【解析】依题意知, 圆台上底面半径  $r=1$ , 下底面半径  $R=2$ .



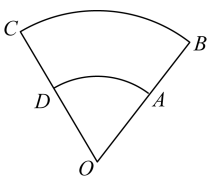
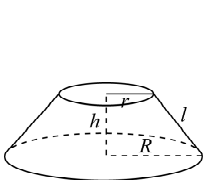
如图所示,圆台的侧面展开为圆环的一部分即  $ABCD$ , 其小扇形弧长  $\widehat{AD} = 2\pi$ , 大扇形弧长  $\widehat{BC} = 4\pi$ , 由  $\frac{\widehat{BC}}{\widehat{AD}} = 2$  知  $OA = AB =$

$l$ , 则由圆台的侧面积  $S = \frac{1}{2}\widehat{BC} \cdot OB -$

$\frac{1}{2}\widehat{AD} \cdot OA = 6\pi$ , 得  $l = 2$ , 所以高  $h = \sqrt{3}$ ,

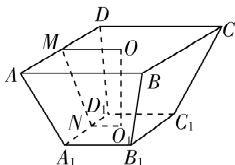
圆台的体积  $V = \frac{1}{3}\pi h \cdot (r^2 + rR + R^2) =$

$\frac{7\sqrt{3}}{3}\pi$ .



### 3-2. $20\sqrt{10}$

【解析】方斗大致图形如图所示, 点  $O, O_1$  分



别为上、下两底面的中心,  $M, N$  分别为  $AD, A_1D_1$  的中点, 则  $MN$  为等腰梯形  $A_1D_1DA$  的高.

根据题意可知  $MO = 3, NO_1 = 2, OO_1 = 3$ ,

则  $MN = \sqrt{3^2 + (3-2)^2} = \sqrt{10}$ ,

所以此方斗的侧面等腰梯形  $ADD_1A_1$  的高为  $\sqrt{10}$  分米. 所以此方斗外表面的侧

面积为  $4 \times \frac{(4+6) \times \sqrt{10}}{2} = 20\sqrt{10}$  (平方分米).

### 4-1. C 【解析】设三个球的半径分别为

$1, 2, 3$ , 则大球的体积  $V_3 = \frac{4}{3}\pi \times 3^3 = 36\pi$ ,

两个小球的体积和  $V_1 + V_2 = \frac{4}{3}\pi \times (1^3 + 2^3) = 12\pi$ . 则最大球的体积是其他两个球的体积和的 3 倍.

### 4-2. A 【解析】设球 $O$ 的半径为 $R$ , 则

$R^2 - \frac{R^2}{4} = (\sqrt{3})^2$ , 解得  $R = 2$ , 所以球  $O$  的

体积  $V = \frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{32}{3}\pi$ . 故选 A.

### 5-1. A 【解析】设圆锥的底面半径为

$r$  cm, 高为  $h$  cm, 母线长为  $R$  cm.



根据题意,可得  $\begin{cases} \frac{\pi R^2}{2} = \frac{9\pi}{2}, \\ 2\pi r = \pi R, \end{cases}$  则  $\begin{cases} R=3, \\ r=\frac{3}{2}, \end{cases}$

所以  $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

故该冰激凌体积  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{18+9\sqrt{3}}{8}\pi(\text{cm}^3)$ . 故选 A.

**5-2.**  $\frac{14\pi}{3}$   $(15+\sqrt{5})\pi$  【解析】由题

意,将四边形  $BCDE$  绕直线  $CD$  旋转一周,所得几何体为圆台,圆台的上、下底面半径分别为 1 和 2,高为 2,故其体积

$$V = \frac{\pi}{3}(1^2 + 1 \times 2 + 2^2) \times 2 = \frac{14\pi}{3}.$$

将四边形  $BCDE$  绕直线  $AB$  旋转一周,所得几何体为一个底面半径和高均为 2 的圆柱,中间挖去一个底面半径为 1,高为 2 的圆锥后所剩下的几何体.

圆柱的表面积为  $2 \times 2^2\pi + 2 \times 4\pi = 16\pi$ ,

圆锥的底面积为  $\pi$ ,

圆锥的侧面积为  $1 \times \sqrt{1^2 + 2^2}\pi = \sqrt{5}\pi$ ,

所以该几何体的表面积为  $16\pi - \pi + \sqrt{5}\pi = (15 + \sqrt{5})\pi$ .

**6-1. C** 【解析】由题意,球的直径与正方体棱长相等,

设正方体棱长为  $a$ ,则  $6a^2 = 6$ ,故  $a = 1 \text{ cm}$ ,

所以  $V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi(\text{cm}^3)$ .

**6-2. B** 【解析】设球的半径为  $R$ . 由球

的体积为  $\frac{32}{3}\pi$ ,可得  $\frac{4}{3}\pi R^3 =$

$\frac{32}{3}\pi$ ,则  $R = 2$ .

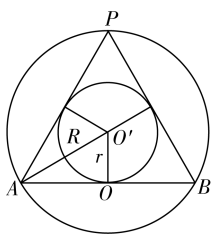
又长方体的体对角线长度即为球的直径,故长方体的体对角线长为 4.

设长方体的高为  $x$ ,则  $\sqrt{1+1+x^2} = 4$ , $x = \sqrt{14}$ ,所以该长方体的体积为  $\sqrt{14}$ .

**7-1. A** 【解析】如图所示,等边三角形



$PAB$  的内切圆和  
外接圆的半径即  
为圆锥  $PO$  的内  
切球和外接球的  
半径,



记内切球和外接球的半径分别为  $r$  和  $R$ ,

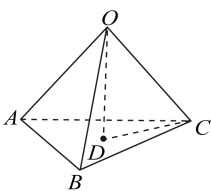
$$\text{则 } \frac{r}{R} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

所以其外接球与内切球的表面积之比为

$$\frac{4\pi R^2}{4\pi r^2} = 4 : 1.$$

### 7-2. A 【解析】

由于三棱锥  $S-ABC$  与三棱锥  $O-ABC$  的底面都是



$\triangle ABC$ ,  $O$  是  $SC$  的中点, 因此三棱锥  $S-ABC$  的高是三棱锥  $O-ABC$  高的 2 倍, 所以三棱锥  $S-ABC$  的体积也是三棱锥  $O-ABC$  体积的 2 倍.

在三棱锥  $O-ABC$  中, 其棱长都是 1. 如图

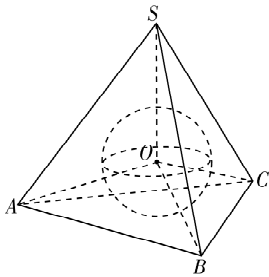
$$\text{所示, } S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times AB^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}, \text{ 高 } OD =$$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \text{ 则 } V_{S-ABC} = 2V_{O-ABC} = 2 \times$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

### 7-3. $\frac{\sqrt{6}}{12}a$ 【解析】

作出棱长为  $a$  的正四面体  $S-ABC$  及其内切球  $O$ , 如图, 连接  $OA, OB, OC, OS$ . 设正四面体  $S-ABC$  的内切球  $O$  的半径为  $r$ , 正四面体  $S-ABC$  的高为  $h$ .



$$\therefore V_{S-ABC} = 4V_{O-ABC}, S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2, h =$$

$$\sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a,$$



$$\therefore \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} a = 4 \times \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \cdot r,$$

$$\therefore r = \frac{\sqrt{6}}{12} a.$$

**8-1.**  $\frac{2\pi}{3}$  【解析】设球的半径为  $R$ .

由题意可知,圆柱的底面半径为  $R$ ,圆柱的高为  $2R$ ,

因为圆柱的表面积是  $6\pi$ ,所以  $2\pi R \times 2R + 2\pi R^2 = 6\pi$ ,解得  $R = 1$ .

所以圆柱的体积  $V_1 = \pi R^2 \times 2R = \pi \times 1^2 \times 2 \times 1 = 2\pi$ ,

$$\text{球的体积 } V_2 = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 1^3 = \frac{4\pi}{3},$$

所以可以注入的水的体积最多为  $V_1 -$

$$V_2 = 2\pi - \frac{4\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

**8-2.** 5 【解析】可将正三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  置于圆柱  $O_1O_2$  内,使得  $\triangle ABC$ ,  $\triangle A_1B_1C_1$  的外接圆分别为圆  $O_2$ ,圆  $O_1$ .

设  $AB = a$ ,圆柱  $O_1O_2$  底面圆的半径为  $m$ ,母线长为  $h$ ,则  $O_1O_2$  的中点  $O$  到圆柱底面圆上每点的距离都相等,则  $O$  为圆柱  $O_1O_2$  外接球的球心,即正三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  外接球的球心.

设球  $O$  的半径为  $R$ ,则  $R =$

$$\sqrt{m^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}.$$

因为正三角形  $ABC$  内切圆的半径与正三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  内切球的半径相等,所以设正三角形  $ABC$  内切圆的半径为  $r$ ,

由等面积法可得  $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot r$ ,解得

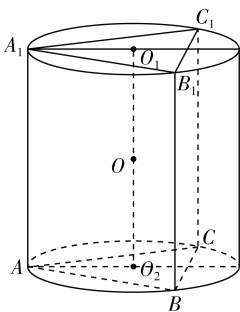
$$r = \frac{\sqrt{3}}{6} a, \text{ 则 } h = 2r = \frac{\sqrt{3}}{3} a, \text{ 圆 } O_2 \text{ 的半径 } m =$$

$$\frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} a, \text{ 所以 } R = \sqrt{m^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2} =$$

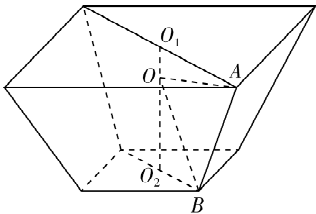
$$\frac{\sqrt{15}}{6} a.$$

因此正三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  外接球和内切球的表面积比值为  $\left(\frac{R}{r}\right)^2 =$

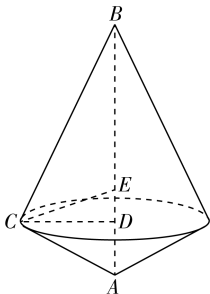
$$\left(\frac{\frac{\sqrt{15}a}{6} \times \frac{6}{\sqrt{3}a}}{\frac{\sqrt{3}a}{6}}\right)^2 = 5.$$



**9-1.  $40\pi$**  【解析】米斗的示意图如图所示, 设米斗两底面中心分别为  $O_1, O_2$ , 由棱台的性质可知, 外接球的球心  $O$  在直线  $O_1O_2$  上. 由题意  $O_1A = 2\sqrt{2}, O_2B = \sqrt{2}, AB = 2\sqrt{5}$ , 所以  $O_1O_2 = \sqrt{AB^2 - (O_1A - O_2B)^2} = \sqrt{20 - 2} = 3\sqrt{2}$ . 设外接球的半径为  $R$ ,  $OO_2 = h$ , 则  $OO_1 = |3\sqrt{2} - h|$ . 因为  $O_1O_2$  垂直于上、下底面, 所以  $OO_2^2 + O_2B^2 = R^2$ , 即  $h^2 + (\sqrt{2})^2 = R^2$ , 又  $OO_1^2 + O_1A^2 = R^2$ , 即  $(3\sqrt{2} - h)^2 + (2\sqrt{2})^2 = R^2$ , 联立解得  $h = 2\sqrt{2}, R^2 = 8 + 2 = 10$ , 所以该米斗的外接球的表面积为  $4\pi R^2 = 40\pi$ .



**10-1.  $\frac{16\pi}{9}$**  【解析】过点  $C$  作  $CD \perp AB$ , 垂足为点  $D$ , 将  $\text{Rt}\triangle ABC$  以斜边  $AB$  所在直线为旋转轴旋转一周得到一个几何体, 该几何体是以  $CD$  为底面圆半径,  $CA, CB$  为母线的两个圆锥拼接而成的组合体, 设该组合体的内切球球心为点  $E$ , 则点  $E$  在线段  $AB$  上, 点  $E$  到  $AC, BC$  的距离相等, 连接  $CE$ .



设内切球的半径为  $r$ , 则  $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACE} + S_{\triangle BCE}$ , 即  $\frac{1}{2}CA \cdot CB = \frac{1}{2}CA \cdot r + \frac{1}{2}CB \cdot$



$r$ , 所以  $r = \frac{CA \cdot CB}{CA+CB} = \frac{1 \times 2}{1+2} = \frac{2}{3}$ , 所以该几

何体的内切球的表面积为  $4\pi r^2 = 4\pi \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{16\pi}{9}$ .

**11-1.  $16\pi$  【解析】**由题意知,  $CD$  为该球的直径, 由此易知, 当顶点  $A$  在底面的射影为球心  $O$  时, 且底面  $BCD$  为等腰直角三角形时, 三棱锥  $A-BCD$  的体积最大, 所以  $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2R \times R \times R = \frac{8}{3}$ , 解得

$R=2$ , 故所求球  $O$  的表面积  $S = 4\pi R^2 =$

$16\pi$ .

**12-1. C 【解析】**由题意可知旋转后的几何体是一个圆柱挖掉两个全等的圆锥, 其中圆柱和圆锥的底面半径均为 1, 圆柱的高为 4, 圆锥的高为 1, 则所求几

何体的体积为  $\pi \times 1^2 \times 4 - 2 \times \frac{1}{3} \times \pi \times 1^2 \times 1 =$

$4\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}$ . 故选 C.

**12-2. 【解】**由题可知, 该几何体是一个底面半径为 3, 高为 6 的圆柱, 挖去一个底面半径为 3, 高为 3 的圆锥.

所以该几何体的表面积  $S_{\text{表}} = S_{\text{圆柱表}} - S_{\text{圆柱上底}} + S_{\text{圆锥侧}} = (2\pi \times 3 \times 6 + 2\pi \times 3^2) - \pi \times 3^2 + \pi \times 3 \times 3\sqrt{2} = (45 + 9\sqrt{2})\pi$ ,

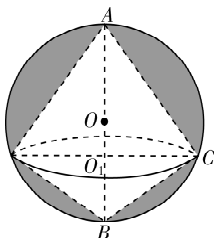
该几何体的体积  $V = V_{\text{圆柱}} - V_{\text{圆锥}} = \pi \times 3^2 \times 6 - \frac{1}{3} \pi \times 3^2 \times 3 = 45\pi$ .

**12-3. 【解】**过点  $C$  作  $CO_1 \perp AB$ , 垂足为  $O_1$ , 如图所示.

因为  $\angle BCA = 90^\circ$ ,  $\angle BAC = 30^\circ$ ,  $AB = 4$ ,

所以  $AC = 2\sqrt{3}$ ,  $BC = 2$ ,  $CO_1 = \sqrt{3}$ .

旋转一周后得到的几何体为球内部挖去两个圆锥后剩下的部分.



因为  $S_{\text{球}} = 4\pi R^2 = 16\pi$ ,  $S_{\text{圆锥}AO_1\text{侧}} = \pi \times \sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 6\pi$ ,



$$S_{\text{圆锥}BO_1\text{侧}} = \pi \times \sqrt{3} \times 2 = 2\sqrt{3}\pi,$$

$$\text{所以 } S_{\text{几何体}} = S_{\text{球}} + S_{\text{圆锥}AO_1\text{侧}} + S_{\text{圆锥}BO_1\text{侧}} = (22 + 2\sqrt{3})\pi,$$

所以旋转所得到的几何体的表面积为  $(22 + 2\sqrt{3})\pi$ .

$$\text{又 } V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{32}{3}\pi,$$

$$V_{\text{圆锥}AO_1} = \frac{1}{3}AO_1 \cdot \pi \cdot CO_1^2 = \pi \cdot AO_1,$$

$$V_{\text{圆锥}BO_1} = \frac{1}{3}BO_1 \cdot \pi \cdot CO_1^2 = \pi \cdot BO_1,$$

$$\text{所以 } V_{\text{几何体}} = V_{\text{球}} - (V_{\text{圆锥}AO_1} + V_{\text{圆锥}BO_1}) = \frac{32}{3}\pi - 4\pi = \frac{20}{3}\pi.$$

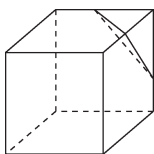
### 巩固练

1. **D** 【解析】如图,去掉的一个棱锥的体积是

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} =$$

$\frac{1}{48}$ , 剩余几何体的体积是  $1 - 8 \times$

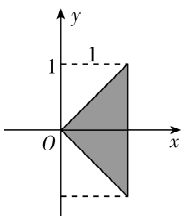
$$\frac{1}{48} = \frac{5}{6}.$$



2. **B** 【解析】设正六棱柱的底面边长为  $a$  m, 高为  $h$  m, 则  $2ah = 1$ ,  $\sqrt{3}a = 1$ , 解得  $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . 所以这个六棱柱的

$$\text{体积 } V = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}(\text{m}^3).$$

3. **C** 【解析】直线  $y = x$ ,  $y = -x$ ,  $x = 1$  围成图中阴影部分所示的图形, 则其绕  $y$  轴旋转一



周得到的几何体是一个圆柱挖去两个相同且共顶点的圆锥.

$$\text{圆柱的体积 } V_1 = \pi \times 1^2 \times 2 = 2\pi,$$

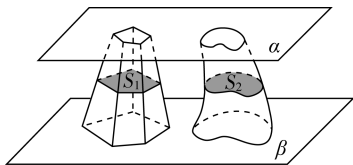
$$\text{圆锥的体积 } V_2 = \frac{1}{3} \times \pi \times 1^2 \times 1 = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{因此所求旋转体的体积为 } V = V_1 - 2V_2 = \frac{4}{3}\pi.$$

4. **A** 【解析】如图所示, 由祖暅原理的含义可得, 当平面  $\alpha \parallel \beta$ , 并且和  $\alpha$  平行



的任意平面截得两个几何体的所得的截面面积  $S_1, S_2$  总有  $S_1 = S_2$  时, 则  $V_1 = V_2$ , 则 A 选项正确.



5. **B** 【解析】设四棱锥  $P-ABCD$  的高为  $h$ , 底面  $ABCD$  的面积为  $S$ ,

$$\text{则 } V_2 = V_{P-ABD} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} Sh = \frac{1}{6} Sh.$$

因为  $CE = 2EP$ , 所以  $PE = \frac{1}{3} PC$ ,

$$\text{所以 } V_1 = V_{P-EBD} = V_{E-PBD} = \frac{1}{3} V_{C-PBD} =$$

$$\frac{1}{3} V_{P-BCD} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} Sh = \frac{1}{18} Sh, \text{ 所以 } \frac{V_1}{V_2} =$$

$$\frac{\frac{1}{18} Sh}{\frac{1}{6} Sh} = \frac{1}{3}.$$

6.  $\frac{2}{3}$  【解析】设正四棱台的高、斜高分别为  $h, x$ .

$$\text{所以 } 4 \times \frac{1}{2} \times (1+2) \times x = 1^2 + 2^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{5}{6}.$$

$$\text{由勾股定理得 } h^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2,$$

$$\text{解得 } h = \frac{2}{3}.$$

7. **B** 【解析】因为圆柱的轴截面为正方形, 母线长为 6,

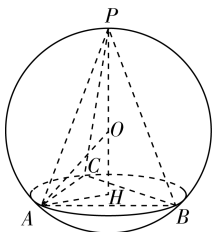
所以圆柱的底面圆直径和高都是 6,

所以该圆柱的内切球的半径为 3, 如图, 球  $O$  即为该圆柱的内切球.

若该圆柱内放置一个棱长为  $a$  的正四面体, 并且正四面体在该圆柱内可以任意转动,

则该正四面体内接于该圆柱的内切球时, 棱长  $a$  最大.

如图该正四面体  $P-ABC$  的棱长为  $a$ ,





设点  $P$  在平面  $ABC$  内的射影为  $H$ , 即  $PH \perp$  平面  $ABC$ ,

则球心  $O$  在  $PH$  上, 且  $OP = OA = 3$ ,

$$AH = \frac{2}{3}AB \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}a,$$

$$\text{所以 } PH = \sqrt{PA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a,$$

$$\text{所以 } OH = PH - OP = \frac{\sqrt{6}}{3}a - 3,$$

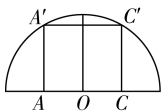
在  $\text{Rt}\triangle OAH$  中,  $OA^2 = OH^2 + AH^2$ , 即  $3^2 =$

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{3}a - 3\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2,$$

整理可得  $a^2 - 2\sqrt{6}a = 0$ , 解得  $a = 2\sqrt{6}$  或  $a = 0$  (舍),

所以  $a$  的最大值为  $2\sqrt{6}$ , 故选 B.

8. **B** 【解析】作出过正方体的对角面的截面, 如图所示.



设球的半径为  $R$ , 正方体的棱长为  $a$ ,

$$\text{那么 } CC' = a, OC = \frac{\sqrt{2}a}{2},$$

在直角三角形  $C'CO$  中, 由勾股定理, 得  $CC'^2 + OC^2 = OC'^2$ ,

$$\text{即 } a^2 + \left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2 = R^2, \text{ 解得 } R = \frac{\sqrt{6}}{2}a,$$

$$\text{所以半球的体积 } V_1 = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi R^3 =$$

$$\frac{2}{3} \pi \times \left(\frac{\sqrt{6}}{2}a\right)^3 = \frac{\sqrt{6}}{2} \pi a^3,$$

正方体的体积  $V_2 = a^3$ ,

所以半球与正方体的体积比为  $\frac{\sqrt{6}}{2} \pi a^3 :$

$$a^3 = \sqrt{6} \pi : 2.$$

9.  $\frac{1}{6}$  【解析】三棱锥  $D_1 - EDF$  的体积

即为三棱锥  $F - DD_1E$  的体积. 因为  $E$ ,  $F$  分别为线段  $AA_1$ ,  $B_1C$  上的点, 所以

$\triangle EDD_1$  的面积为定值  $\frac{1}{2}$ , 点  $F$  到侧面

$DD_1E$  的距离为定值 1, 所以  $V_{D_1 - EDF} =$

$$V_{F - DD_1E} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}.$$

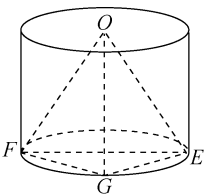


10.  $\frac{32\pi}{3}$  【解析】 $\because$  正四棱锥  $P-ABCD$

底面的四个顶点  $A, B, C, D$  在球  $O$  的同一个大圆上,  $\therefore$  球心  $O$  是正方形  $ABCD$  对角线的交点,  $PO$  是棱锥的高. 设球半径为  $R$ , 则  $AB = \sqrt{2}R$ ,  
 $S_{ABCD} = (\sqrt{2}R)^2 = 2R^2$ ,  $V_{P-ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot PO = \frac{1}{3} \times 2R^2 \times R = \frac{16}{3}$ ,  $\therefore R = 2$ ,  $\therefore V_{\text{球}} = \frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{4\pi}{3} \times 2^3 = \frac{32\pi}{3}$ .

11. 4 【解析】如图

所示, 其中圆柱的底面半径为 2, 高为 3,  $\therefore$  三棱锥  $O-EFG$  的

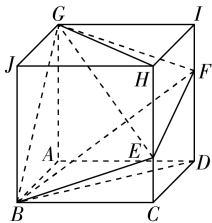


高为 3,  $\therefore$  当  $\triangle EFG$  的面积最大时, 三棱锥  $O-EFG$  的体积最大. 由  $\triangle EFG$  为下底面圆的一个内接直角三角形, 可设  $\angle EGF = 90^\circ$ , 则  $EF$  为下底面圆的直径,  $\therefore$  当点  $G$  在  $EF$  的垂直平分线上时,  $\triangle EFG$  的面积最大, 最大值为  $\frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$ ,  $\therefore$  三棱锥

$O-EFG$  体积的最大值  $V_{\max} = \frac{1}{3} \times 4 \times 3 = 4$ .

12. 2 : 1 【解析】将几何体补全为正方体, 对于三棱锥  $G-BEF$ , 如图①所示,

$$\begin{aligned} V_{G-BEF} &= V_{ABCD-GJHI} - V_{G-HEBJ} - V_{G-HIFE} - \\ &V_{B-CDFE} - V_{B-DFGA} = 27 - \frac{1}{3} \times 3 \times \frac{1}{2} \times 5 \times 3 - \\ &\frac{1}{3} \times 3 \times \frac{1}{2} \times 3 \times 3 - \frac{1}{3} \times 3 \times \frac{1}{2} \times 3 \times 3 - \\ &\frac{1}{3} \times 3 \times \frac{1}{2} \times 5 \times 3 = 3. \end{aligned}$$

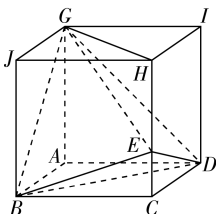


图①



对于三棱锥  $B-EGD$ , 如图②所示,

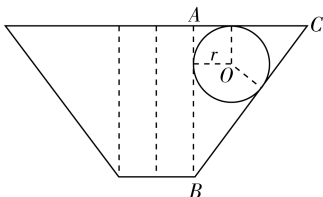
$$\begin{aligned}
 V_{B-EGD} &= V_{ABCD-GJHI} - V_{G-HEBJ} - V_{G-HIDE} - \\
 &V_{E-BCD} - V_{G-ABD} = 27 - \frac{1}{3} \times 3 \times \frac{1}{2} \times 5 \times 3 - \\
 &\frac{1}{3} \times 3 \times \frac{1}{2} \times 5 \times 3 - \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{1}{2} \times 3 \times 3 - \\
 &\frac{1}{3} \times 3 \times \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = 6.
 \end{aligned}$$



图②

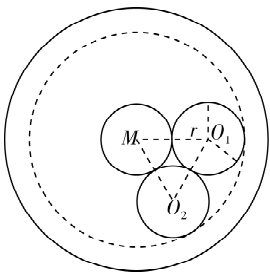
所以  $V_{B-EGD} : V_{G-BEF} = 2 : 1$ .

- 13. 10 6 【解析】**图①为圆台容器的纵切图, 圆  $O$  内切于  $\triangle ABC$  时金属球  $O$  的半径最大, 设球  $O$  的半径为  $r$ , 易得  $AB = 40$  cm,  $AC = 30$  cm,  $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 50$  (cm), 由等面积法得  $\frac{1}{2}(AB+AC+BC)r = \frac{1}{2}AB \cdot AC$ , 解得  $r = 10$  cm, 故金属球的最大半径为 10 cm.



图①

图②为图①  $O$  点高度的水平切面, 圆  $M$ 、圆  $O_1$ 、圆  $O_2$  两两相切, 此时可放最多金属球, 因为  $r = 10$  cm, 所以  $MO_1 = MO_2 = O_1O_2 = 20$  cm, 故  $\angle O_1MO_2 = 60^\circ$ , 则金属球最多可放  $\frac{360^\circ}{60^\circ} = 6$  个.



图②

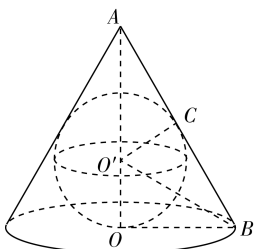
- 14. AC 【解析】**对于 A: 设圆锥底面半



径为  $r$ , 母线为  $l$ , 则侧面积为  $\frac{1}{2} \cdot$

$2\pi r \cdot 6 = 18\pi$ , 解得  $r = 3$ , 则圆锥的高为  $\sqrt{l^2 - r^2} = 3\sqrt{3}$ , 故圆锥体积  $V = \frac{1}{3}\pi \times 3^2 \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}\pi$ , 故 A 正确;

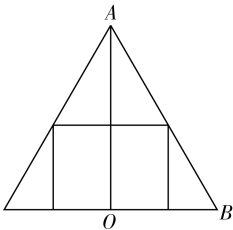
对于 B: 如图①, 由于  $l = 6 = 2r$ , 所以  $\angle ABO = 60^\circ$ , 内切球  $O'$  与圆锥侧面和底面分别切于点  $C, O$ , 易知  $\triangle OO'B \cong \triangle CO'B$ , 故内切球半径  $r' = 3 \cdot \tan 30^\circ = \sqrt{3}$ , 故内切球的体积为  $\frac{4}{3}\pi \times (\sqrt{3})^3 = 4\sqrt{3}\pi$ , 故 B 错误;



图①

对于 C: 设外接球的半径为  $R$ , 则  $R^2 = (3\sqrt{3} - R)^2 + 3^2$ , 解得  $R = 2\sqrt{3}$ , 所以该圆锥外接球的表面积  $S = 4\pi \times (2\sqrt{3})^2 = 48\pi$ , 故 C 正确;

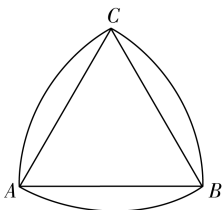
对于 D: 过圆锥的顶点以及正方体的一条体对角线作截面如图②所示, 设该圆锥的内接正方体的棱长为  $a$ , 则由相似可得  $\frac{\sqrt{2}a}{6} = \frac{3\sqrt{3} - a}{3\sqrt{3}}$ , 解得  $a = 9\sqrt{2} - 6\sqrt{3}$ , 故 D 错误.



图②

## 15. ③④

【解析】观察几何体知, 勒洛四面体的最大截面是经过正四面



图①

体  $ABCD$  的任意三个顶点的平面截勒洛四面体而得, 勒洛四面体  $ABCD$



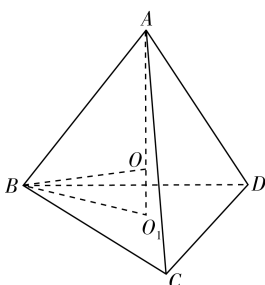
被平面  $ABC$  截得的截面是正三角形  $ABC$  及外面拼接上以各边为弦的三个弓形, 弓形弧是以正三角形  $ABC$  各顶点为圆心, 边长为半径且圆心角为  $60^\circ$  的扇形弧, 如图①所示, 因此

截面面积为  $3 \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} AB^2 - 2 \times$

$\frac{\sqrt{3}}{4} AB^2 = 2\pi - 2\sqrt{3}$ , ① 不正确, ③

正确;

由对称性知, 勒洛四面体  $ABCD$  内切球球心是正四面体  $ABCD$  的内切球、外接球球心  $O$ , 如图②所示.



图②

正三角形  $BCD$  外接圆半径  $O_1B =$

$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ , 正四面体  $ABCD$  的高  $AO_1 =$

$\sqrt{AB^2 - O_1B^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ , 设正四面体

$ABCD$  的外接球半径为  $R$ , 在  $\text{Rt}\triangle BOO_1$

中,  $R^2 = \left(\frac{2\sqrt{6}}{3} - R\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2$ , 解得

$R = \frac{\sqrt{6}}{2}$ , 因此勒洛四面体  $ABCD$  内切

球半径为  $2 - \frac{\sqrt{6}}{2}$ , ② 不正确;

勒洛四面体能够容纳的最大球与勒洛四面体的 4 个弧面都相切, 即为勒洛四面体内切球, 所以勒洛四面体  $ABCD$  能够容纳的最大球的半径为

$2 - \frac{\sqrt{6}}{2}$ , ④ 正确.

## 11.2 平面的基本事实与推论

### 易错记

#### 1-1. 1 或 2 或 3

【解析】如图, 在正方体  $ABCD -$



$A_1B_1C_1D_1$  中,

①  $AA_1 \cap AB = A$ ,

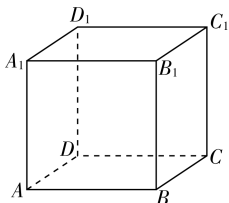
$AA_1 \cap A_1B_1 = A_1$ ,

直线  $AB, A_1B_1$  与

$AA_1$  可以确定 1

个平面 (平面

$ABB_1A_1$ ).



②  $AA_1 \cap AB = A, AA_1 \cap A_1D_1 = A_1$ , 直线  $AB$ ,

$AA_1$  与  $A_1D_1$  可以确定 2 个平面 (平面

$ABB_1A_1$  和平面  $ADD_1A_1$ ).

③ 三条直线  $AB, AD, AA_1$  交于一点  $A$ , 它们

可以确定 3 个平面 (平面  $ABCD$ , 平面

$ABB_1A_1$  和平面  $ADD_1A_1$ ).

**1-2. 【证明】** 因为  $D_1, E, F$  三点不共线,

所以  $D_1, E, F$  三点确定一个平面  $\alpha$ .

由题意得,  $D_1E \subset$  平面  $AA_1D_1D, DA \subset$  平面

$AA_1D_1D$ , 且直线  $D_1E, DA$  不平行,

如图.

分别延长  $D_1E$  与  $DA$  相交于点  $G$ ,

所以  $G \in$  直线  $D_1E$ , 所以  $G \in$  平面  $\alpha$ .

设直线  $D_1F$  与  $DC$  的延长线交于点  $H$ , 同理

得  $H \in$  平面  $\alpha$ .

又点  $G, B, H$  均在平面  $ABCD$  内,

且  $E$  是  $AA_1$  的中点,  $AA_1 \parallel DD_1$ ,

所以  $AG = AD = AB$ , 所以  $\triangle AGB$  为等腰三

角形,

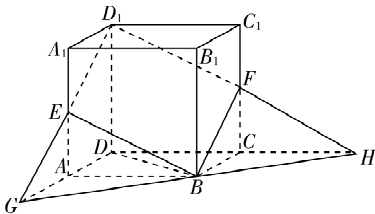
所以  $\angle ABG = 45^\circ$ , 同理  $\angle CBH = 45^\circ$ .

所以  $\angle GBH = 180^\circ$ .

所以  $G, B, H$  三点共线, 且  $GH \subset$  平面  $\alpha$ .

从而  $B \in \alpha$ .

所以  $D_1, E, F, B$  四点共面.



### 题型诀

**1-1. D 【解析】** 对于 A, 因为共线的三

点可确定无数个平面, 故 A 错误;

对于 B, 若两个平面有一个公共点, 那么

就有一条经过该点的公共直线, 即交线,

该交线上有无数个公共点, 故 B 错误;

对于 C, 三条平行直线可能共面, 也可能



有一条在另外两条确定的平面外,故 C 错误;

对于 D,当三条直线两两相交,三个交点不重合时,三条直线共面,当三条直线两两相交于同一个点时,这三条直线可能在同一个平面内,也可能不共面,此时其中任意两条直线都可确定一个平面,即可确定三个平面,故 D 正确.

故选 D.

**1-2. B** 【解析】由基本事实 2,可得①正确.

由题意知  $\alpha, \beta$  不重合,根据基本事实 3,可得②正确.

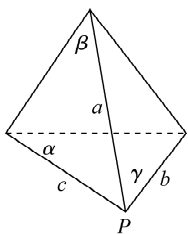
若  $l \not\subset \alpha, A \in l$ ,则  $A \in \alpha$  或  $A \notin \alpha$ ,可得③不正确.

若  $A, B, C \in \alpha, A, B, C \in \beta$ ,如果  $A, B, C$  不共线,则  $\alpha$  与  $\beta$  重合;如果  $A, B, C$  共线,则  $\alpha$  与  $\beta$  可以相交,可得④不正确.

其中正确的个数为 2,故选 B.

**2-1. 【证明】**如图,  $\because \alpha \cap \gamma = b, \gamma \cap \beta = a$ ,  
 $\therefore a \subset \gamma, b \subset \gamma$ .

又直线  $a$  和  $b$  不平行,  $\therefore$  直线  $a$  和  $b$  必相交.



设  $a \cap b = P$ ,则  $P \in a, P \in b$ .

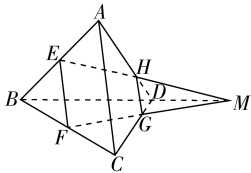
$\because a \subset \beta, b \subset \alpha, \therefore P \in \alpha, P \in \beta$ .

又  $\alpha \cap \beta = c, \therefore P \in c$ ,即直线  $c$  经过点  $P$ ,

$\therefore$  直线  $a, b, c$  三条直线必过同一点.

**2-2. 【证明】**如图,因为  $DH = \frac{1}{4}AD, DG =$

$\frac{1}{4}CD$ ,所以  $GH = \frac{1}{4}AC$ ,且  $GH \parallel AC$ .



又  $EF = \frac{1}{2}AC$ ,且  $EF \parallel AC$ ,所以  $GH =$

$\frac{1}{2}EF$ ,且  $GH \parallel EF$ ,



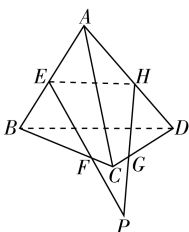
故  $E, F, G, H$  四点共面, 且直线  $EH, FG$  必相交于一点.

设  $EH \cap FG = M$ , 因为  $M \in EH, EH \subset$  平面  $ABD$ , 所以  $M \in$  平面  $ABD$ , 同理  $M \in$  平面  $BCD$ .

而平面  $ABD \cap$  平面  $BCD = BD$ , 故  $M \in BD$ , 即直线  $EH, FG$  必相交于一点, 且这个交点在直线  $BD$  上.

### 3-1. C 【解析】

如图, 在空间四边形  $ABCD$  中, 点  $E, F$  分别在边  $AB, BC$  上, 有  $E \in$  平面  $ABC, F \in$  平面  $ABC$ , 则直线  $EF \subset$  平面  $ABC$ ,



同理, 直线  $GH \subset$  平面  $ADC$ . 因为  $EF, GH$  能相交于点  $P$ , 即  $P \in EF, P \in GH$ , 因此  $P \in$  平面  $ABC, P \in$  平面  $ADC$ .

而平面  $ABC \cap$  平面  $ADC = AC$ , 于是有  $P \in AC$ , A 不正确, C 正确, D 不正确.

又直线  $AC$  与  $BD$  没有公共点, 即点  $P$  不在直线  $BD$  上, B 不正确.

故选 C.

### 3-2. (1) BD (2) AC 【解析】

(1) 若  $EH \cap FG = P$ , 那么点  $P \in$  平面  $ABD, P \in$  平面  $BCD$ , 而平面  $ABD \cap$  平面  $BCD = BD$ , 所以  $P \in BD$ . 即点  $P$  在直线  $BD$  上.

(2) 若  $EF \cap GH = Q$ , 连接  $AC$ , 则点  $Q \in$  平面  $ABC, Q \in$  平面  $ACD$ , 而平面  $ABC \cap$  平面  $ACD = AC$ , 所以  $Q \in AC$ . 即点  $Q$  在直线  $AC$  上.

3-3. 【证明】因为  $AB \parallel CD$ , 所以  $AB, CD$  确定平面  $ABCD$ , 因为  $AB \cap \alpha = E$ , 所以  $E \in$  平面  $ABCD, E \in \alpha$ . 由基本事实 3 可知,  $E$  必在平面  $ABCD$  与平面  $\alpha$  的交线上. 同理  $F, G, H$  都在平面  $ABCD$  与平面  $\alpha$  的交线上, 因此  $E, F, G, H$  必在同一直线上.

4-1. C 【解析】对于 A: 根据基本事实 2, 显然, 选项 A 中的直线  $AB$  在平面  $\alpha$  内, 故 A 不正确;

对于 B: 三条平行直线, 可以共面, 也可

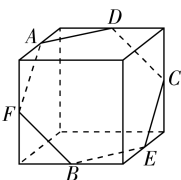


以是其中一条直线平行于其他两条直线确定的平面,故 B 不正确;

对于 C:根据基本事实 3,显然,如果两平面有一个公共点,则一定有无数个公共点,故 C 正确;

对于 D:根据基本事实 1,空间中不共线的三点才能确定一个平面. 故 D 不正确.

**4-2. D** 【解析】由正方体性质,选项 A, B, C 中,  $A, B, C, D$  四点显然不共面.



对于 D 选项,如图取  $E, F$  为正方体所在棱的中点,依次连接  $ADCEBF$ ,

易知  $ADCEBF$  为平面正六边形,所以  $A, B, C, D$  四点共面.

故选 D.

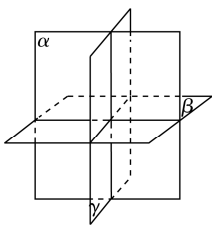
### 巩固练

**1. B** 【解析】A. 如果两个平面有三个公共点,那么这两个平面可能相交或重合,所以该选项错误;

B. 若其中任意三点共线,则该直线和另外一点可确定一个平面,所以该选项正确;

C. 空间中,相交于同一点的三条直线不一定在同一平面内,如三棱锥  $P-ABC$ ,相交于同一点  $P$  的三条直线  $PA, PB, PC$  不在同一平面内,所以该选项错误;

D. 三个不重合的平面最多可将空间分成八个部分,如图,所以该选项错误.



故选 B.

**2. D** 【解析】在选项 A, B, C 中,由棱柱、正六边形、中位线的性质,知均有  $PS \parallel QR$ ,即在此三个图形中  $P, Q, R, S$  四点共面,在 D 选项中,易知  $PS$  不平行于  $QR$ ,  $PS$  与  $QR$  异面. 故选 D.

**3.  $P \in l$**  【解析】因为  $m \subset \alpha, n \subset \beta, m \cap n = P$ ,所以  $P \in \alpha$  且  $P \in \beta$ . 又  $\alpha \cap \beta = l$ ,



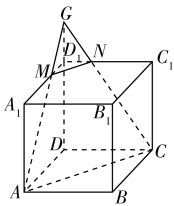
所以点  $P$  在直线  $l$  上, 所以  $P \in l$ .

4. (1) 4 (2) 7 【解析】(1) 可以想象三棱锥的 4 个顶点, 它们总共确定 4 个平面.

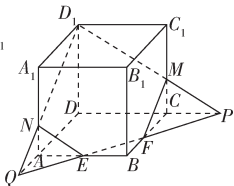
(2) 可以想象四棱锥的 5 个顶点, 它们总共确定 7 个平面.

5. 【解】(1) 画法: 连接  $GA$  交  $A_1D_1$  于点  $M$ , 连接  $GC$  交  $C_1D_1$  于点  $N$ , 连接  $MN$ ,  $AC$ , 则  $MA, CN, MN, AC$  为指定平面与正方体表面的交线. 如图①所示.

(2) 画法: 连接  $EF$  并延长交  $DC$  的延长线于点  $P$ , 交  $DA$  的延长线于点  $Q$ , 连接  $D_1P$  交  $CC_1$  于点  $M$ , 连接  $D_1Q$  交  $AA_1$  于点  $N$ , 连接  $MF, NE$ , 则  $D_1M, MF, FE, EN, ND_1$  为指定平面与正方体表面的交线. 如图②所示.



图①



图②

6. C 【解析】选项 C 中,  $\alpha$  与  $\beta$  有公共点  $A$ , 则它们有过点  $A$  的一条交线, 而不是点  $A$ , 故 C 错.

7. D 【解析】连接  $PO$  (图略), 由基本事实 3 知  $PO$  是平面  $PAC$  和平面  $PBD$  的交线, 又  $N$  为平面  $PAC$  和平面  $PBD$  的公共点, 所以  $P, N, O$  三点共线, 故 D 正确. 同理,  $O, N, P, M$  四点共面,  $O, N, M, D$  四点不共面,  $O, N, M$  三点不共线, 故 A, B, C 错误.

8. ④ 【解析】连接  $AC, A_1C_1, AO$  (图略),  $AO$  是平面  $AB_1D_1$  和平面  $AA_1C_1C$  的交线,

$\therefore M \in A_1C, A_1C \subset \text{平面 } AA_1C_1C,$

$\therefore M \in \text{平面 } AA_1C_1C,$  又  $M \in \text{平面 } AB_1D_1,$

$\therefore M \in AO,$  即  $A, M, O$  三点共线,

因此①②③中结论均正确, ④中结论不正确.

9. 【证明】(1)  $\because A_1C \cap \text{平面 } BDC_1 = O,$   
 $\therefore O \in A_1C, O \in \text{平面 } BDC_1.$



又 $\because A_1C \subset \text{平面 } ACC_1A_1, \therefore O \in \text{平面 } ACC_1A_1$ .  $\because AC, BD$  交于点  $M$ ,

$\therefore M \in AC, M \in BD$ .

又  $AC \subset \text{平面 } ACC_1A_1, BD \subset \text{平面 } BDC_1$ ,

$\therefore M \in \text{平面 } ACC_1A_1, M \in \text{平面 } BDC_1$ .

又  $C_1 \in \text{平面 } ACC_1A_1, C_1 \in \text{平面 } BDC_1$ ,

$\therefore C_1, O, M$  三点在平面  $ACC_1A_1$  与平面  $BDC_1$  的交线上,

$\therefore C_1, O, M$  三点共线.

(2) 连接  $EF, A_1B, CD_1$ .

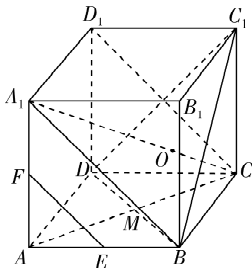
$\because E$  为  $AB$  的中点,  $F$  为  $AA_1$  的中点,

$\therefore EF \parallel BA_1$ ,

又 $\because BC \parallel A_1D_1, BC = A_1D_1$ ,

$\therefore$  四边形  $BCD_1A_1$  是平行四边形,

$\therefore BA_1 \parallel CD_1. \therefore EF \parallel CD_1, \therefore E, F, C, D_1$  四点共面.



(3)  $\because EF \parallel CD_1, EF \neq CD_1$ ,

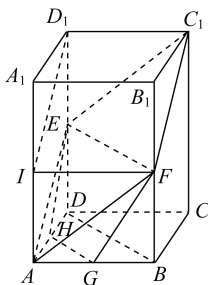
$\therefore$  设  $CE$  与  $D_1F$  交于一点  $P$ , 则  $P \in CE, CE \subset \text{平面 } ABCD$ ,

$\therefore P \in \text{平面 } ABCD$ , 同理,  $P \in \text{平面 } ADD_1A_1$ ,

$\therefore P \in \text{平面 } ABCD \cap \text{平面 } ADD_1A_1 = AD$ ,

$\therefore$  直线  $CE, D_1F, DA$  三线交于一点  $P$ , 即三线共点.

- 10. AD** 【解析】如图, 连接  $EC_1, FC_1$ ,  $EF, AF, AE$ , 取棱  $AA_1$  的中点  $I$ , 连接  $ID_1, IF$ .



由题设,  $IF \parallel D_1C_1$  且  $IF = D_1C_1$ , 则四边形  $IFC_1D_1$  为平行四边形, 所以



$ID_1 // FC_1$  且  $ID_1 = FC_1$ ,

又  $E$  是棱  $DD_1$  中点, 故  $AI // ED_1$  且  $AI = ED_1$ , 则四边形  $IAED_1$  为平行四边形, 所以  $ID_1 // AE$  且  $ID_1 = AE$ , 综上所述,  $FC_1 // AE$  且  $FC_1 = AE$ , 故  $F, C_1, E, A$  四点共面, A 正确; 连接  $EH$ , 由过直线外一点有且仅有一条直线与该直线平行, 且由 A 知  $FC_1 // AE$ , 可知不可能有  $EH // C_1F$ , B 错误; 连接  $HG$ , 由  $A \in$  平面  $ABCD$ ,  $A \in$  平面  $EFC_1$ , 知  $A \in$  平面  $EFC_1 \cap$  平面  $ABCD$ , 又  $HG \subset$  平面  $ABCD$ , 而  $A \notin HG$ , 故平面  $EFC_1 \cap$  平面  $ABCD \neq HG$ , C 错误; 连接  $BD, FG$ , 又  $G, H$  分别是棱  $AB, AD$  的中点, 则  $HG // BD$  且  $HG = \frac{1}{2}BD$ ,  $E, F$  分别是棱  $DD_1, BB_1$  的中点, 则  $EF // BD$  且  $EF = BD$ ,

所以  $EF // HG$ , 即  $E, F, H, G$  四点共面, 且  $HG = \frac{1}{2}EF$ , 故直线  $EH$  与直线  $FG$  相交, D 正确. 故选 AD.

## 11.3 空间中的平行关系

### 11.3.1 平行直线与异面直线+

### 11.3.2 直线与平面平行+

### 11.3.3 平面与平面平行

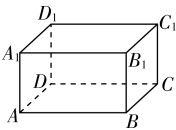
#### 易错记

1-1.  $80^\circ$  或  $100^\circ$  【解析】由等角定理可知,  $\alpha = \beta$  或  $\alpha + \beta = 180^\circ$ ,  $\therefore \beta = 80^\circ$  或  $100^\circ$ .

2-1. D 【解析】若直线  $a$  和  $b$  共面, 则由题意可知  $a // b$ ; 若  $a$  和  $b$  不共面, 则由题意可知  $a$  与  $b$  是异面直线. 故选 D.

2-2. B 【解析】如

图, 在长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $AA_1$  与



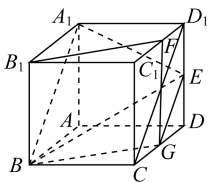
$BC$  是异面直线, 又  $AA_1 // BB_1, AA_1 // DD_1$ , 显然  $BB_1 \cap BC = B, DD_1$  与  $BC$  是异面直线, 故选 B.

3-1. 【解】在棱  $C_1D_1$  上存在点  $F$ , 使  $B_1F //$  平面  $A_1BE$ , 且  $F$  为  $C_1D_1$  的中点.



证明如下:

如图所示,分别取  $C_1D_1$  和  $CD$  的中点  $F, G$ , 连接  $B_1F, EG, CD_1, FG, BG$ . 因为  $A_1D_1 \parallel B_1C_1 \parallel BC$ , 且  $A_1D_1 = BC$ , 所以四边形  $A_1BCD_1$  是平行四边形, 因此  $D_1C \parallel A_1B$ . 又  $E, G$  分别为  $D_1D, CD$  的中点, 所以  $EG \parallel D_1C$ , 从而  $EG \parallel A_1B$ . 这说明  $A_1, B, G, E$  四点共面, 所以  $BG \subset$  平面  $A_1BE$ . 因为四边形  $C_1CDD_1$  与四边形  $B_1BCC_1$  都是正方形,  $F, G$  分别为  $C_1D_1$  和  $CD$  的中点, 所以  $FG \parallel C_1C \parallel B_1B$ , 且  $FG = C_1C = B_1B$ . 因此四边形  $B_1BGF$  是平行四边形, 所以  $B_1F \parallel BG$ . 而  $B_1F \not\subset$  平面  $A_1BE$ ,  $BG \subset$  平面  $A_1BE$ , 故  $B_1F \parallel$  平面  $A_1BE$ .

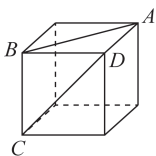


### 题型诀

**1-1. C** 【解析】因为空间中直线与直线的位置关系分为异面和共面, 其中共面又分为相交与平行. 故选 C.

**1-2. D** 【解析】展开图

还原为正方体, 如图所示. 在正方体中, 直线  $AB$  与  $CD$  为异面直线, 不垂直, 故选 D.



**2-1. 【证明】** (1) 在正方形  $ADD_1A_1$  中,  $M, M_1$  分别为  $AD, A_1D_1$  的中点,

$$\therefore A_1M_1 \perp AM,$$

$\therefore$  四边形  $AMM_1A_1$  是平行四边形,

$$\therefore A_1A \perp M_1M.$$

$$\text{又} \because A_1A \perp B_1B, \therefore M_1M \perp B_1B,$$

$\therefore$  四边形  $BB_1M_1M$  为平行四边形.

(2) 由(1)知四边形  $BB_1M_1M$  为平行四边形,

$$\therefore B_1M_1 \parallel BM.$$

同理可得四边形  $CC_1M_1M$  为平行四边形,

$$\therefore C_1M_1 \parallel CM.$$

由平面几何知识可知,

$\angle BMC$  和  $\angle B_1M_1C_1$  都是锐角.



$\therefore \angle BMC = \angle B_1 M_1 C_1$ .

**2-2. 【证明】**如图,连接  $GE, FH$ .

因为  $E, G$  分别为  $BC, AB$  的中点,

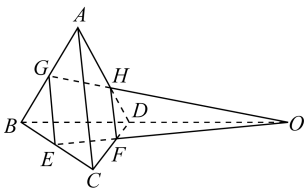
所以  $GE \parallel AC$ .

又因为  $DF:FC = DH:HA = 2:3$ ,

所以  $FH \parallel AC$ ,

从而  $FH \parallel GE$ ,

故  $E, F, G, H$  四点共面.



又因为  $GE = \frac{1}{2}AC, FH = \frac{2}{5}AC$ ,

所以四边形  $EFHG$  为梯形.

设延长  $GH, EF$  交于一点  $O$ .

因为  $O$  在平面  $ABD$  内,又在平面  $BCD$  内,

所以  $O$  在这两个平面的交线上.

而这两个平面的交线是  $BD$ ,

且交线只有这一条,

所以点  $O$  在直线  $BD$  上.

所以  $EF, GH, BD$  交于一点.

**3-1. 【证明】**如图  $A_1$

所示,连接  $B_1C$ ,

设  $B_1C \cap BC_1 = O$ .

在三棱柱  $ABC -$

$A_1B_1C_1$  中,四边

形  $BCC_1B_1$  为平

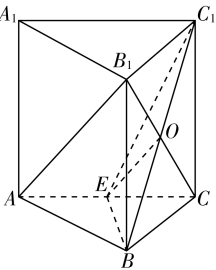
行四边形,所以  $O$  为  $B_1C$  的中点.

因为  $E, O$  分别为  $AC, B_1C$  的中点,

所以  $AB_1 \parallel EO$ .

又因为  $AB_1 \not\subset$  平面  $BEC_1$ ,  $EO \subset$  平面  $BEC_1$ ,

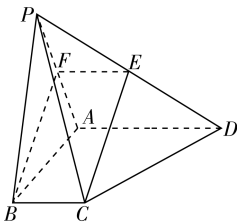
所以  $AB_1 \parallel$  平面  $BEC_1$ .



**4-1. 【证明】**如图,取  $F$  为棱  $PA$  的中点,

连接  $EF, BF$ , 因为  $E$  为棱  $PD$  的中点, 所

以  $EF \parallel AD$ , 且  $EF = \frac{1}{2}AD$ ,

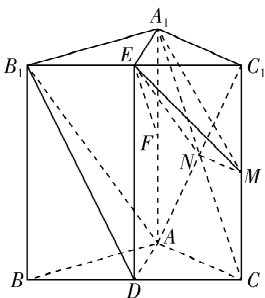




又因为  $AD \parallel BC$ , 且  $AD = 2BC$ , 所以  $EF \parallel BC$ ,  $EF = BC$ , 则四边形  $EFBC$  是平行四边形, 所以  $CE \parallel BF$ ,

又因为  $CE \not\subset$  平面  $PAB$ ,  $BF \subset$  平面  $PAB$ , 所以  $CE \parallel$  平面  $PAB$ .

**5-1. ABC 【解析】** 连接  $AC_1, A_1E, ED, MN, EM$ , 如图所示. 由题意得,  $N$  为  $AC_1$  的中点, 又  $E$  是  $B_1C_1$  的中点, 所以  $EN \parallel AB_1$ . 又  $AB_1 \subset$  平面  $ADB_1$ ,  $EN \not\subset$  平面  $ADB_1$ , 所以  $EN \parallel$  平面  $ADB_1$  (提示: 线面平行的判定定理). 因为四边形  $BCC_1B_1$  是平行四边形,  $D, E$  分别为  $BC, B_1C_1$  的中点, 所以  $DE \parallel BB_1, DE = BB_1$ , 所以  $DE \parallel AA_1, DE = AA_1$ , 所以四边形  $ADEA_1$  是平行四边形, 所以  $A_1E \parallel AD$ , 又  $AD \subset$  平面  $ADB_1$ ,  $A_1E \not\subset$  平面  $ADB_1$ , 所以  $A_1E \parallel$  平面  $ADB_1$ . 又  $A_1E, EN \subset$  平面  $A_1EN$ ,  $A_1E \cap EN = E$ , 所以平面  $A_1EN \parallel$  平面  $ADB_1$  (提示: 面面平行的判定定理), 所以 D 正确. 而  $EF, A_1M$  均与平面  $A_1EN$  相交, 所以  $EF, A_1M$  均与平面  $ADB_1$  相交, A, B 都不正确. 又  $MN$  与  $AC$  平行,  $AC$  与平面  $ADB_1$  相交, 所以  $MN$  与平面  $ADB_1$  也相交, 且  $MN \subset$  平面  $EMN$ , 所以 C 不正确. 故选 ABC.



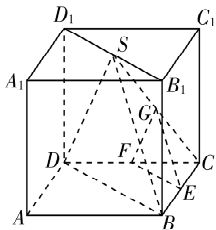
**5-2. 【证明】** (1) 如图, 连接  $SB$ .

$\because E, G$  分别是  $BC, SC$  的中点,

$\therefore EG \parallel SB$ .

又  $\because SB \subset$  平面  $BDD_1B_1$ ,  $EG \not\subset$  平面  $BDD_1B_1$ ,

$\therefore EG \parallel$  平面  $BDD_1B_1$ .



(2) 连接  $SD$ .  $\because F, G$  分别是  $DC, SC$  的中点,  $\therefore FG \parallel SD$ .

又  $\because SD \subset$  平面  $BDD_1B_1$ ,  $FG \not\subset$  平面

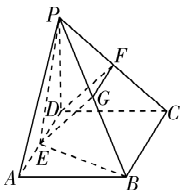


$BDD_1B_1, \therefore FG \parallel \text{平面 } BDD_1B_1.$

又  $EG \subset \text{平面 } EFG, FG \subset \text{平面 } EFG, EG \cap FG = G,$

$\therefore \text{平面 } EFG \parallel \text{平面 } BDD_1B_1.$

**6-1. 【证明】**(1) 取  $PB$  中点  $G$ , 连接  $FG, EG$ , 如图所示.



因为点  $G, F$  分别为  $PB, PC$  的中点,

所以  $FG \parallel BC, FG = \frac{1}{2}BC.$

因为四边形  $ABCD$  为长方形, 所以  $BC \parallel AD$ , 且  $BC = AD$ ,

又  $E$  为  $AD$  的中点, 所以  $DE \parallel FG, DE = FG$ , 所以四边形  $DEGF$  为平行四边形,

所以  $DF \parallel GE$ . 因为  $DF \not\subset \text{平面 } PBE, GE \subset \text{平面 } PBE$ , 所以  $DF \parallel \text{平面 } PBE$ .

(2) 由(1)知  $DF \parallel \text{平面 } PBE$ , 又  $DF \subset \text{平面 } PDC$ , 平面  $PDC \cap \text{平面 } PBE = l$ , 所以  $DF \parallel l$ .

**7-1. D 【解析】** $\because \text{平面 } BCC_1B_1 \parallel \text{平面 } ADD_1A_1$ , 平面  $BCC_1B_1 \cap \text{平面 } D_1EBF = BF$ , 平面  $ADD_1A_1 \cap \text{平面 } D_1EBF = D_1E$ ,  
 $\therefore D_1E \parallel BF$ .

同理可得  $BE \parallel D_1F, \therefore$  四边形  $D_1EBF$  为平行四边形.

当  $E, F$  分别为  $AA_1, CC_1$  的中点时,  $D_1E = D_1F$ , 此时四边形  $D_1EBF$  为菱形, 但不是正方形;

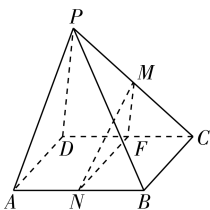
当  $E, F$  分别与  $A, C_1$  (或  $A_1, C$ ) 重合时,  $D_1E \perp D_1F$ , 此时四边形  $D_1EBF$  为矩形, 但不是正方形;

其他情况下, 四边形  $D_1EBF$  为普通的平行四边形.

综上所述, 四边形  $D_1EBF$  为平行四边形.

故选 D.

**8-1. 【证明】**如图, 取  $CD$  的中点  $F$ , 连接  $FM, FN$ .



因为  $M, N$  分别是  $PC, AB$  的中点,  
 所以  $MF \parallel PD, NF \parallel AD$ . 因为  $PD \cap AD = D, MF \cap NF = F$ , 且  $PD, AD \subset$  平面  $PAD$ ,  
 $MF, NF \subset$  平面  $MNF$ ,  
 所以平面  $PAD \parallel$  平面  $MNF$ , 因为  $MN \subset$  平面  $MNF$  (提示: 面面平行的性质), 所以  
 $MN \parallel$  平面  $PAD$ .

**8-2. 【证明】** 如图, 作  $MP \parallel BB_1$  交  $BC$  于点  $P$ , 连接  $NP$ .

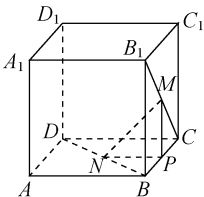
$$\because MP \parallel BB_1, \therefore \frac{CM}{MB_1} = \frac{CP}{PB}.$$

$$\because BD = B_1C, DN = CM, \therefore B_1M = BN,$$

$$\therefore \frac{CM}{MB_1} = \frac{DN}{NB},$$

$$\therefore \frac{CP}{PB} = \frac{DN}{NB},$$

$$\therefore NP \parallel CD \parallel AB.$$



$$\because NP \not\subset \text{平面 } AA_1B_1B, AB \subset \text{平面 } AA_1B_1B,$$

$$\therefore NP \parallel \text{平面 } AA_1B_1B.$$

$$\because MP \parallel BB_1, MP \not\subset \text{平面 } AA_1B_1B, BB_1 \subset \text{平面 } AA_1B_1B,$$

$$\therefore MP \parallel \text{平面 } AA_1B_1B.$$

$$\because MP \subset \text{平面 } MNP, NP \subset \text{平面 } MNP, MP \cap NP = P,$$

$$\therefore \text{平面 } MNP \parallel \text{平面 } AA_1B_1B.$$

$$\text{又} \because MN \subset \text{平面 } MNP,$$

$$\therefore MN \parallel \text{平面 } AA_1B_1B.$$

**9-1.  $\frac{4\sqrt{3}}{9}$  【解析】**  $AA', BB'$  相交于点  $O$ ,

$AA', BB'$  确定的平面与平面  $\alpha$ 、平面  $\beta$  的交线分别为  $AB, A'B'$ , 平面  $\alpha \parallel$  平面  $\beta$ , 所以

$$AB \parallel A'B', \text{ 又 } OA : OA' = 3 : 2, \text{ 所以 } \frac{OA}{OA'} =$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{3}{2}. \text{ 同理可得 } AC \parallel A'C', \frac{AC}{A'C'} = \frac{3}{2},$$

$$BC \parallel B'C', \frac{BC}{B'C'} = \frac{3}{2}, \text{ 所以 } \triangle ABC \sim$$

$$\triangle A'B'C', \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \frac{9}{4},$$

$$\text{又 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \times 2 \times$$



$$2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}, \text{ 所以 } S_{\triangle A'B'C'} = \frac{4\sqrt{3}}{9}.$$

**10-1. 【解】**(1) 存在实数  $\lambda = 2$  满足  $PF = \lambda FC$ , 使得  $BF \parallel$  平面  $PDE$ .

证明如下: 取  $DC$  上一点  $G$ , 满足  $DG = 2GC$ , 连接  $GF, GB, BF$ .

因为  $PF = 2FC$ , 所以  $GF \parallel PD$ ,

因为  $GF \not\subset$  平面  $PDE, PD \subset$  平面  $PDE$ , 所以  $GF \parallel$  平面  $PDE$ .

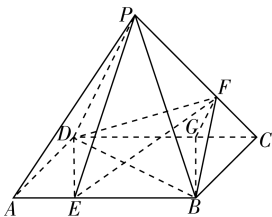
因为底面  $ABCD$  是正方形, 且  $2AE = EB$ , 所以  $DG \parallel BE$ ,

所以四边形  $EBGD$  为平行四边形, 所以  $BG \parallel ED$ ,

因为  $BG \not\subset$  平面  $PDE, ED \subset$  平面  $PDE$ , 所以  $BG \parallel$  平面  $PDE$ .

又因为  $BG \cap GF = G$ , 且  $BG \subset$  平面  $BGF, GF \subset$  平面  $BGF$ , 所以平面  $BGF \parallel$  平面  $PDE$ .

又因为  $BF \subset$  平面  $BGF$ , 所以  $BF \parallel$  平面  $PDE$ .



(2) 连  $BD, EF, DF$ , 已知  $V_{P-DEF} = V_{F-PDE}$ , 因为  $BF \parallel$  平面  $PDE$ ,

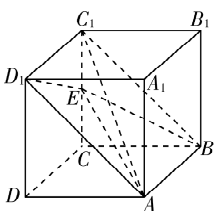
所以  $V_{F-PDE} = V_{B-PDE}$ ,

又因为正四棱锥的高为 1, 底面边长为

$$2, \text{ 所以 } V_{B-PDE} = V_{P-BDE} = \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times 2 = \frac{4}{9}.$$

**10-2. 【解】**(1) 在

正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 连接  $AC_1$ , 如图. 则  $AB \parallel C_1D_1$  且  $AB =$



$C_1D_1$ , 即四边形  $ABC_1D_1$  为平行四边形, 有  $S_{\square ABC_1D_1} = 2S_{\triangle ABC_1}$ .

三棱锥  $E-ABC_1$  的体积  $V_{E-ABC_1} = V_{A-BC_1E} =$

$$\frac{1}{3} S_{\triangle BC_1E} \cdot AB = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} BC \cdot C_1E \right) \cdot$$

$$AB = \frac{1}{6} \times 2 \times 1 \times 2 = \frac{2}{3},$$



所以四棱锥  $E-ABC_1D_1$  的体积  $V_{E-ABC_1D_1} =$

$$2V_{E-ABC_1} = \frac{4}{3}.$$

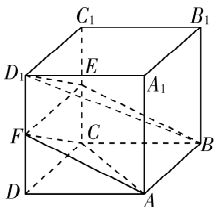
(2) 取棱  $DD_1$  的中

点  $F$ , 连接  $AF, CF$ ,

$AC$ , 则  $FC, FA, CA$

就是所要作的线,

如图所示.



理由: 在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中, 连接  $EF$ ,

因为  $E$  是  $CC_1$  的中点,  $F$  为  $DD_1$  的中点,

所以  $EF \parallel CD \parallel BA$ , 且  $EF = CD = BA$ .

则四边形  $ABEF$  是平行四边形,

所以  $AF \parallel BE$ .

而  $BE \subset$  平面  $BD_1E$ ,  $AF \not\subset$  平面  $BD_1E$ , 因此

$AF \parallel$  平面  $BD_1E$ .

又  $FD_1 \parallel CE$ ,  $FD_1 = CE$ ,

所以四边形  $CED_1F$  为平行四边形,

则  $CF \parallel ED_1$ .

又  $ED_1 \subset$  平面  $BD_1E$ ,  $CF \not\subset$  平面  $BD_1E$ , 于是

有  $CF \parallel$  平面  $BD_1E$ .

又  $CF \cap AF = F$ ,  $CF, AF \subset$  平面  $AFC$ , 所以

平面  $AFC \parallel$  平面  $BD_1E$ , 所以  $FC, FA, CA$

就是所要作的线.

### 巩固练

1. **B** 【解析】连接  $BD, EF, HG$  (图略).

$\because$  四边形  $ABCD$  是空间四边形,  $E, F$  分别是  $AB, AD$  的中点,

$\therefore EF$  为三角形  $ABD$  的中位线,

$$\therefore EF \parallel BD \text{ 且 } EF = \frac{1}{2}BD.$$

$$\text{又 } \because CG = \frac{1}{3}BC, CH = \frac{1}{3}DC,$$

$$\therefore \triangle CHG \sim \triangle CDB, \text{ 且 } HG \parallel BD,$$

$$\therefore HG = \frac{1}{3}BD.$$

$\therefore$  在四边形  $EFHG$  中,  $EF \parallel HG$ ,

即  $E, F, G, H$  四点共面, 且  $EF \neq HG$ ,

$\therefore$  四边形  $EFHG$  是梯形,

$\therefore$  直线  $FH$  与直线  $EG$  相交. 故选 B.

2. **D** 【解析】对于 A, 当  $\alpha \cap \beta = l, l \parallel a$ ,

$a \not\subset \alpha$  且  $a \not\subset \beta$  时, 满足  $\alpha, \beta$  都平行于直线  $a$ , 但不能推出  $\alpha \parallel \beta$ ;

对于 B, 当  $\alpha \cap \beta = b$ , 且在  $\alpha$  内直线  $b$



一侧有两个点,另一侧有一个点,当三点到 $\beta$ 的距离相等时,不能推出 $\alpha//\beta$ ;  
对于C,当 $l$ 与 $m$ 平行时,不能推出 $\alpha//\beta$ ;

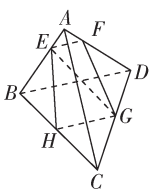
对于D,若 $l//\alpha, l//\beta$ ,则存在过直线 $l$ 的平面 $\gamma$ ,使得 $\gamma \cap \alpha = l_1, \gamma \cap \beta = l_2$ ,于是得 $l_1//l//l_2, l_1 \not\subset \beta, l_2 \subset \beta$ ,则 $l_1//\beta$ ,  
若 $m//\alpha, m//\beta$ ,则存在过直线 $m$ 的平面 $\delta$ ,使得 $\delta \cap \alpha = m_1, \delta \cap \beta = m_2$ ,于是得 $m_1//m//m_2, m_1 \not\subset \beta, m_2 \subset \beta$ ,则 $m_1//\beta$ ,  
又 $l, m$ 是两条异面直线,则 $l_1, m_1$ 是平面 $\alpha$ 内的两条相交直线,所以 $\alpha//\beta$ . 故选D.

3. C 【解析】如图,由

条件知,  $EF // BD$ ,

$$EF = \frac{1}{5}BD, HG // BD,$$

$$\text{且 } HG = \frac{1}{2}BD,$$



所以 $EF//HG$ ,且 $EF = \frac{2}{5}HG$ ,所以四边形 $EFGH$ 为梯形, $EF//BD, EF \not\subset$ 平面 $BCD, BD \subset$ 平面 $BCD$ ,所以 $EF//$ 平面 $BCD$ . 若 $EH//$ 平面 $ADC$ ,则 $EH//FG$ ,显然 $EH$ 不平行于 $FG$ ,所以 $EH$ 不平行于平面 $ADC$ . 故选C.

4.  $40^\circ$  或  $140^\circ$  【解析】空间两个角 $\angle ABC$ 和 $\angle A'B'C'$ ,因为 $AB//A'B', BC//B'C'$ 且 $\angle ABC = 40^\circ$ ,则 $\angle A'B'C' = 40^\circ$ 或 $\angle A'B'C' = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$ .

5. 1 【解析】如图,

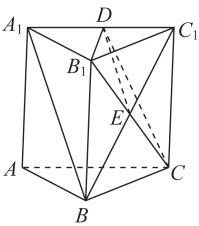
连接 $BC_1$ , 设

$$BC_1 \cap B_1C =$$

$E$ , 连接 $DE$ , 则 $DE$

是平面 $A_1BC_1$ 与

平面 $B_1CD$ 的交线.



$$\because A_1B//\text{平面 } B_1CD, A_1B \subset \text{平面 } A_1BC_1,$$

$$\therefore A_1B//DE.$$

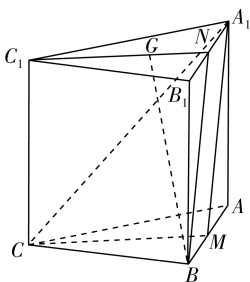
$\because$  四边形 $BCC_1B_1$ 是菱形,

$\therefore E$ 为 $BC_1$ 的中点,

$\therefore D$ 为 $A_1C_1$ 的中点,

$$\therefore A_1D : DC_1 = 1.$$

6. (1) 【证明】连接 $C_1G$ 并延长交 $A_1B_1$ 于点 $N$ , 连接 $BN, CM, BG$ , 如图.



在直三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中, 点  $G$  为  $\triangle A_1B_1C_1$  的重心, 所以  $C_1N \parallel CM$ .

又  $C_1N \not\subset$  平面  $A_1CM$ ,  $CM \subset$  平面  $A_1CM$ ,

所以  $C_1N \parallel$  平面  $A_1CM$ .

因为  $A_1N \parallel BM$ ,  $A_1N = BM$ , 所以四边形  $BMA_1N$  是平行四边形, 所以  $BN \parallel A_1M$ .

又  $BN \not\subset$  平面  $A_1CM$ ,  $A_1M \subset$  平面  $A_1CM$ , 所以  $BN \parallel$  平面  $A_1CM$ .

又  $BN \cap C_1N = N$ , 所以平面  $BGN \parallel$  平面  $A_1CM$ .

又  $BG \subset$  平面  $BGN$ , 所以  $BG \parallel$  平面  $A_1CM$ .

(2) 【解】由(1)知  $BG \parallel$  平面  $A_1CM$ ,

所以  $V_{G-A_1MC} = V_{B-A_1MC} = V_{A_1-BMC}$ ,

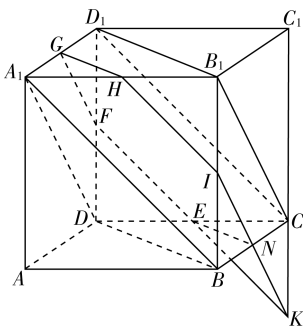
三棱锥  $A_1-BMC$  的高  $A_1A = 2$ ,

$$S_{\triangle BMC} = \frac{1}{2} BM \cdot AC = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1,$$

所以  $V_{G-A_1MC} = V_{A_1-BMC} = \frac{1}{3} AA_1 \cdot S_{\triangle BMC} =$

$$\frac{1}{3} \times 2 \times 1 = \frac{2}{3}.$$

7. B 【解析】如图, 在正方体中, 取  $E, F, G, H, I$  分别是  $CD, DD_1, A_1D_1, A_1B_1, BB_1$  的中点.



因为  $N$  为  $BC$  的中点, 所以  $BD \parallel EN$ ,

又  $A_1B \parallel D_1C, EF \parallel D_1C$ , 则  $A_1B \parallel EF$ .

由  $BD \subset$  平面  $A_1BD$ ,  $EN \not\subset$  平面  $A_1BD$ ,

则  $EN \parallel$  平面  $A_1BD$ , 同理可得  $EF \parallel$  平面  $A_1BD$ ,

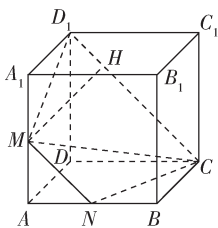


由  $EN \cap EF = E$ ,  $EN, EF \subset$  平面  $EFGHIN$ , 故平面  $EFGHIN \parallel$  平面  $A_1BD$ ,

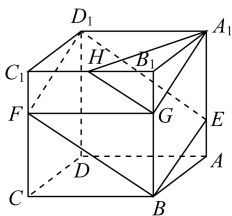
所以平面  $EFGHIN$  中的直线平行于平面  $A_1BD$ ,

由  $MN \parallel$  平面  $A_1BD$  且点  $M$  在平面  $DCC_1D_1$  内运动, 得  $M$  在直线  $EF$  上运动, 要使  $MN$  最小, 只需  $MN \perp EF$ , 延长  $EF, C_1C$  交于  $K$ , 连接  $NK$ , 故只需求出  $\triangle ENK$  底边  $EK$  上的高即可, 由已知可得  $CE = CK = CN = 1$ , 则  $\triangle ENK$  是边长为  $\sqrt{2}$  的等边三角形, 所以底边  $EK$  上的高为  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ , 即线段  $MN$  的最小值为  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ . 故选 B.

8.  $\frac{9}{2}$  【解析】如图, 作  $MH \perp CD_1$ , 垂足为  $H$ , 由面面平行的性质知截面与平面  $AB_1$  的交线  $MN \parallel D_1C$ , 又  $M$  是棱  $AA_1$  的中点, 所以  $N$  是棱  $AB$  的中点, 连接  $CN$ , 所以截面  $CD_1MN$  是等腰梯形, 因为正方体的棱长为 2, 所以  $MN = \sqrt{2}, CD_1 = 2\sqrt{2}, MD_1 = \sqrt{5}$ , 所以等腰梯形  $MNCD_1$  的高  $MH = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ . 所以截面面积  $S = \frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9}{2}$ .



9. 【证明】(1) 如图, 连接  $FG$ .  $\because AE = B_1G = 1$ , 且正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 3,



$\therefore BG = A_1E = 2$ ,

$\therefore BG \parallel A_1E, \therefore$  四边形  $BGA_1E$  是平行



四边形,  $\therefore A_1G \perp BE$ .

又  $\because C_1F \perp B_1G$ ,

$\therefore$  四边形  $C_1FGB_1$  是平行四边形.

$\therefore FG \perp C_1B_1 \perp D_1A_1$ ,

$\therefore$  四边形  $A_1GFD_1$  是平行四边形.

$\therefore A_1G \perp D_1F, \therefore D_1F \perp BE$ ,

$\therefore$  四边形  $BED_1F$  是平行四边形, 故  $E, B, F, D_1$  四点共面.

(2)  $\because H$  是  $B_1C_1$  的中点,  $\therefore B_1H = \frac{3}{2}$ .

又  $B_1G = 1$ ,

$$\therefore \frac{B_1G}{B_1H} = \frac{2}{3}.$$

又  $\frac{FC}{BC} = \frac{2}{3}$ , 且  $\angle FCB = \angle GB_1H = 90^\circ$ ,

$\therefore \triangle B_1HG \sim \triangle CBF$ ,

$\therefore \angle B_1GH = \angle CFB = \angle FBG$ .

$\therefore HG \parallel FB$ .

又由(1)知,  $A_1G \parallel BE$ , 且  $HG \cap A_1G = G$ ,  
 $FB \cap BE = B$ ,

$\therefore$  平面  $A_1GH \parallel$  平面  $BED_1F$ .

**10. AB 【解析】** 对于 A, 因为平面  $\alpha \parallel$  平面

平面  $\beta, CD \subset \beta$ , 所以  $CD \parallel \alpha$ , 故 A 正确;

对于 B, 设由  $PC$  与  $PD$  所确定的平面为  $\gamma$ , 因为平面  $\alpha \parallel$  平面  $\beta$ , 平面

$\alpha \cap$  平面  $\gamma = AB$ , 平面  $\beta \cap$  平面  $\gamma = CD$ ,

所以  $AB \parallel CD$ , 所以  $\frac{PA}{PC} = \frac{AB}{CD}$ , 即  $\frac{2}{2+AC} =$

$\frac{1}{3}$ , 解得  $AC = 4$ , 故 B 正确;

对于 C, 若  $PB = 1$ , 则  $PB + AB = PA$ , 这

与三角形三边关系定理相矛盾, 故 C 错误;

对于 D, 若  $\frac{PA}{PB} = \frac{AB}{CD}$ , 则  $\frac{PA}{AB} = \frac{PB}{CD}$ , 而由

$AB \parallel CD$  得  $\frac{PA}{AB} = \frac{PC}{CD}$ , 但  $PB$  与  $PC$  长度

关系不确定, 故 D 错误.

故选 AB.

**11. ACD 【解析】** 对于 A 选项, 取线段

$BB_1$  的中点  $G$ , 连接  $A_1G, EG, B_1D_1, B_1E$ , 如图所示.

因为在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,

$AA_1 \parallel BB_1$  且  $AA_1 = BB_1$ ,

$F, G$  分别为  $AA_1, BB_1$  的中点, 所以



$A_1F \parallel BG$  且  $A_1F = BG$ ,

所以四边形  $A_1FBG$  为平行四边形,

所以  $BF \parallel A_1G$ ,

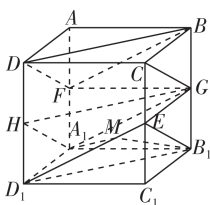
同理可得  $D_1E \parallel A_1G$ , 故  $D_1E \parallel BF$ ,

因为  $D_1E \not\subset$  平面  $BDF$ ,  $BF \subset$  平面  $BDF$ , 所以  $D_1E \parallel$  平面  $BDF$ ,

同理可证  $B_1E \parallel$  平面  $BDF$ ,

因为  $B_1E \cap D_1E = E$ ,  $B_1E, D_1E \subset$  平面  $B_1D_1E$ , 所以平面  $B_1D_1E \parallel$  平面  $BDF$ ,

因为  $B_1M \subset$  平面  $B_1D_1E$ , 所以  $B_1M \parallel$  平面  $BDF$ , 故 A 正确;



对于 B 选项, 取线段  $DD_1$  的中点  $H$ , 连接  $A_1H, GH$ ,

因为在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $AA_1 \parallel DD_1$  且  $AA_1 = DD_1$ ,

$F, H$  分别为  $AA_1, DD_1$  的中点, 所以  $A_1F \parallel DH$  且  $A_1F = DH$ ,

所以四边形  $A_1FDH$  为平行四边形, 所以  $A_1H \parallel DF$ ,

又  $A_1H \not\subset$  平面  $BDF$ ,  $DF \subset$  平面  $BDF$ , 所以  $A_1H \parallel$  平面  $BDF$ ,

同理可证  $A_1G \parallel$  平面  $BDF$ ,

因为  $A_1H \cap A_1G = A_1$ ,  $A_1G, A_1H \subset$  平面  $A_1GH$ , 所以平面  $A_1GH \parallel$  平面  $BDF$ ,

对于任意过点  $A_1$  且在平面  $A_1GH$  内的直线  $l$ , 满足  $l \parallel$  平面  $BDF$ ,

但  $A_1M \not\subset$  平面  $A_1GH$ , 所以  $A_1M$  与平面  $BDF$  不平行, 故 B 错误;

对于 C 选项, 连接  $CG, FG$ ,

因为在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $AA_1 \parallel BB_1$  且  $AA_1 = BB_1$ ,

$F, G$  分别为  $AA_1, BB_1$  的中点, 则  $AF \parallel BG$  且  $AF = BG$ ,

所以四边形  $ABGF$  为平行四边形, 所以  $FG \parallel AB$  且  $FG = AB$ ,

因为  $AB \parallel CD$  且  $AB = CD$ , 所以  $FG \parallel CD$  且  $FG = CD$ ,

所以四边形  $CDFG$  为平行四边形, 故



$DF \parallel CG$ , 同理可证  $B_1E \parallel CG$ , 则  $B_1E \parallel DF$ ,

故当点  $M$  与点  $E$  重合时,  $B_1M \parallel DF$ ,  
故 C 正确;

对于 D 选项(提示:利用反证法), 假设存在点  $M$ , 使得直线  $A_1M$  与直线  $BF$  共面, 则  $A_1, B, F, M$  四点共面, 即点  $M \in$  平面  $A_1BF$ , 事实上, 点  $M \notin$  平面  $A_1BF$ , 所以假设不成立, 故对任意的点  $M$ , 直线  $A_1M$  与直线  $BF$  异面, 故 D 正确.

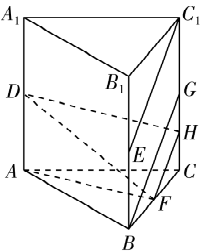
故选 ACD.

## 11.4 空间中的垂直关系

### 11.4.1 直线与平面垂直

#### 题型诀

**1-1.  $\frac{\sqrt{5}}{10}$**  【解析】如图, 在棱  $CC_1$  上取一点  $H$ , 使得  $CC_1 = 4CH$ , 取  $CC_1$  的中点  $G$ , 连接  $BG, HF, DH, AF$ . 由于  $G, E$  分别是棱  $CC_1, BB_1$  的中点, 所以  $BE = C_1G, BE \parallel C_1G$ , 故四边形  $BGC_1E$  为平行四边形, 所以  $C_1E \parallel BG$ , 又因为  $F, H$  分别是  $BC, CG$  的中点, 所以  $HF \parallel BG$ , 所以  $HF \parallel C_1E$ , 则异面直线  $DF$  与  $C_1E$  的夹角是  $\angle DFH$  或其补角.



设  $AB = 4$ , 则  $CF = 2, CH = 1, AD = 2$ .

所以  $HF = \sqrt{CF^2 + CH^2} = \sqrt{5}, DH = \sqrt{AC^2 + (AD - CH)^2} = \sqrt{17},$

$AF = \sqrt{AB^2 - BF^2} = 2\sqrt{3}, DF = \sqrt{AF^2 + AD^2} = 4,$

故  $\cos \angle DFH = \frac{16 + 5 - 17}{2 \times 4 \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10},$

故异面直线  $DF$  与  $C_1E$  的夹角的余弦值是  $\frac{\sqrt{5}}{10}$ .

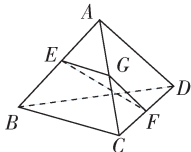
**1-2.  $60^\circ$**  【解析】如图, 设  $G$  为  $AC$  的中点, 连接  $EG, FG$ .  $\because E, F$  分别是  $AB, CD$  的中点,



$\therefore EG \parallel BC, EG =$

$$\frac{1}{2}BC = 1, FG \parallel AD,$$

$$FG = \frac{1}{2}AD = 1,$$



$\therefore \angle EGF$  为异面直

线  $AD$  与  $BC$  所成的角 (或其补角). 又

$$EF = \sqrt{3},$$

$$\therefore \text{在 } \triangle EGF \text{ 中, } \cos \angle EGF = \frac{1+1-3}{2 \times 1 \times 1} = -\frac{1}{2},$$

$\therefore \angle EGF = 120^\circ$ , 即异面直线  $AD$  与  $BC$  所成角的大小为  $60^\circ$ .

**2-1. CD** 【解析】根据线面垂直的判定定理可知当平面  $\alpha$  内有两条相交直线都与  $l$  垂直时, 直线  $l$  与平面  $\alpha$  垂直. 故选 CD.

**2-2. A** 【解析】对于 A, 依题意  $AA' \perp$  平面  $ABC$ ,  $BC \subset$  平面  $ABC$ , 所以  $AA' \perp BC$ , 又  $AB$  是底面圆的直径, 所以  $BC \perp AC$ ,  $AA' \cap AC = A$ ,  $AA', AC \subset$  平面  $AA'C$ , 所以  $BC \perp$  平面  $AA'C$ , 故 A 正确;

对于 B, 显然  $BC$  与  $AB$  不垂直, 则  $BC$  不可能垂直于平面  $A'AB$ , 故 B 错误;

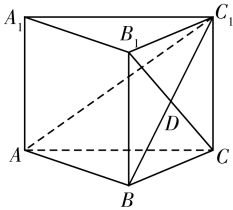
对于 C, 显然  $AC$  与  $A'C$  不垂直, 则  $AC$  不可能垂直于平面  $A'BC$ , 故 C 错误;

对于 D, 显然  $AC$  与  $AB$  不垂直, 则  $AC$  不可能垂直于平面  $A'AB$ , 故 D 错误.

故选 A.

**2-3. 【证明】** 因为  $\angle BAC = 90^\circ$ , 所以  $AB \perp AC$ , 又因为侧面  $ABB_1A_1$  是正方形, 所以  $AB \perp AA_1$ , 因为  $AC \cap AA_1 = A$ ,  $AC, AA_1 \subset$  平面  $ACC_1A_1$ , 所以  $AB \perp$  平面  $ACC_1A_1$ , 而  $C_1A \subset$  平面  $ACC_1A_1$ , 则  $AB \perp C_1A$ . 因为四边形  $ACC_1A_1$  为正方形, 所以  $AC_1 \perp A_1C$ . 又  $A_1B_1 \parallel AB$ , 所以  $A_1B_1 \perp C_1A$ , 又  $A_1B_1 \cap A_1C = A_1$ ,  $A_1B_1, A_1C \subset$  平面  $A_1B_1C$ , 所以  $C_1A \perp$  平面  $A_1B_1C$ .

**3-1. 【证明】** 连接  $BC_1$  与  $B_1C$  相交于点  $D$ , 如图所示.

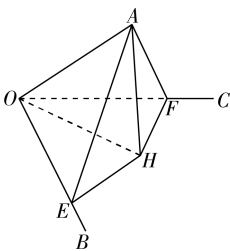




在直三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $BB_1 \perp$  平面  $ABC$ ,  $AB \subset$  平面  $ABC$ , 所以  $BB_1 \perp AB$ . 又  $AB \perp BC$ ,  $BC \cap BB_1 = B$ ,  $BC, BB_1 \subset$  平面  $BB_1C_1C$ , 所以  $AB \perp$  平面  $BB_1C_1C$ . 又因为  $B_1C \subset$  平面  $BB_1C_1C$ , 所以  $AB \perp B_1C$ . 因为  $BC = CC_1$ , 所以四边形  $BCC_1B_1$  为菱形, 所以  $B_1C \perp BC_1$ , 又因为  $AB \cap BC_1 = B$ , 且  $AB, BC_1 \subset$  平面  $ABC_1$ , 所以  $B_1C \perp$  平面  $ABC_1$ , 又因为  $AC_1 \subset$  平面  $ABC_1$ , 所以  $B_1C \perp AC_1$ .

#### 4-1. D 【解析】

如图, 过点  $A$  作  $AH \perp$  平面  $OBC$  于点  $H$ , 连接  $OH$ , 则  $\angle AOH$  为直线  $OA$  与平面  $OBC$  所成的角  $\theta$ .



分别作  $HE \perp OB$  交  $OB$  于点  $E$ ,  $HF \perp OC$  交  $OC$  于点  $F$ ,

连接  $AE, AF$ .

因为  $AH \perp$  平面  $OBC$ ,  $OB \subset$  平面  $OBC$ , 所以  $AH \perp OB$ .

因为  $AH \cap HE = H$ ,  $AH, HE \subset$  平面  $AEH$ , 所以  $OB \perp$  平面  $AEH$ .

而  $AE \subset$  平面  $AEH$ ,

所以  $AE \perp OB$ , 同理  $AF \perp OC$ .

因为  $\angle AOB = \angle AOC = 60^\circ$ ,  $\angle OEA = \angle OFA = 90^\circ$ ,  $OA = OA$ ,

所以  $\triangle OEA \cong \triangle OFA$ ,

所以  $AE = AF$ ,  $OE = OF$ .

所以  $EH = FH$ , 则  $OH$  为  $\angle BOC$  的平分线,

由  $\angle BOC = 60^\circ$ , 可得  $\angle EOH = 30^\circ$ .

令  $HE = a$ , 则  $OH = 2a$ ,  $OE = \sqrt{3}a$ ,

在  $\text{Rt}\triangle AOE$  中, 因为  $\angle AOB = 60^\circ$ ,

所以  $OA = \frac{\sqrt{3}a}{\cos 60^\circ} = 2\sqrt{3}a$ ,

故在  $\text{Rt}\triangle AOH$  中,

$$\cos \angle AOH = \frac{OH}{OA} = \frac{2a}{2\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

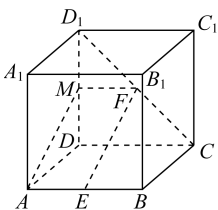
即  $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . 故选 D.

4-2. (1) 【证明】如图, 取  $DD_1$  的中点  $M$ , 连接  $MA, MF$ , 则  $MF \parallel DC \parallel AE$ , 且  $MF =$



$\frac{1}{2}DC=AE$ , 所以

四边形  $AEFM$  是  
平行四边形, 所  
以  $EF \parallel AM$ .



又  $AM \subset$  平面  $ADD_1A_1$ ,  $EF \not\subset$  平面  $ADD_1A_1$ ,

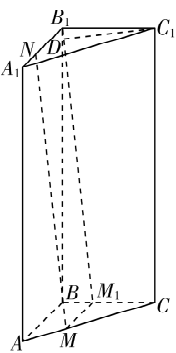
所以  $EF \parallel$  平面  $ADD_1A_1$ .

(2) 【解】因为  $EF \parallel AM$ ,  $AD \perp$  平面  $CDD_1C_1$ , 所以  $\angle AMD$  与直线  $EF$  和平面  $CDD_1C_1$  所成的角相等. 设正方体的棱长为 1, 在  $\text{Rt}\triangle AMD$  中, 有  $\sin \angle AMD = \frac{AD}{AM} =$

$\frac{2\sqrt{5}}{5}$ , 所以直线  $EF$  和平面  $CDD_1C_1$  所成

角的正弦值为  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

5-1. (1) 【证明】取棱  $BC$  上靠近  $B$  的三等分点  $M_1$ , 连接  $MM_1$ ,  $B_1M_1$ , 如图, 又  $M$  为棱  $AC$  上靠近  $A$  的三等分点,  $N$  为棱  $A_1B_1$  上靠近  $A_1$  的三等分点,



$\therefore MM_1 \parallel \frac{2}{3}AB, NB_1 \parallel$

$\frac{2}{3}AB,$

$\therefore MM_1 \parallel NB_1$ , 且  $MM_1 = NB_1$ .

$\therefore$  四边形  $MM_1B_1N$  是平行四边形,

$\therefore MN \parallel B_1M_1$ .

又  $MN \not\subset$  平面  $BB_1C_1C$ ,  $B_1M_1 \subset$  平面  $BB_1C_1C$ ,

$\therefore MN \parallel$  平面  $BB_1C_1C$ .

(2) 【解】由直三棱柱的性质及  $\angle ABC = 90^\circ$ , 可知  $B_1N \perp$  平面  $BB_1C_1C$ , 又  $C_1D \subset$  平面  $BB_1C_1C$ ,  $\therefore B_1N \perp C_1D$ .

$\therefore$  当  $C_1D \perp B_1M_1$  时,  $C_1D \perp$  平面  $B_1MN$ ,

$\therefore B_1M_1 \perp C_1D$ ,

$\therefore \angle BB_1M_1 + \angle B_1DC_1 = 90^\circ$ .

又  $\angle B_1C_1D + \angle B_1DC_1 = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle B_1C_1D = \angle BB_1M_1$ .

又  $\tan \angle BB_1M_1 = \frac{BM_1}{BB_1} = \frac{\frac{1}{3}}{3} = \frac{1}{9}$ ,

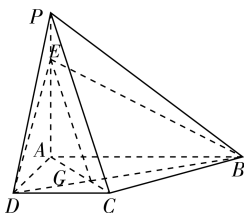


$$\therefore \tan \angle B_1 C_1 D = \frac{B_1 D}{B_1 C_1} = \frac{B_1 D}{1} = \frac{1}{9},$$

$\therefore B_1 D = \frac{1}{9}$ , 即  $BB_1$  上存在点  $D$  使得

$C_1 D \perp$  平面  $B_1 M N$ .

**5-2. (1) 【证明】** 如图, 连接  $AC$  交  $BD$  于点  $G$ , 连接  $EG$ .



由  $AB \parallel CD, DC = 1, AB = 2$ ,

得  $\triangle ABG \sim \triangle CDG$ , 则  $\frac{AG}{CG} = \frac{AB}{CD} = 2$ .

由  $PE = \frac{1}{3}PA$ , 得  $\frac{AE}{EP} = 2$ .

在  $\triangle PAC$  中, 由  $\frac{AE}{EP} = \frac{AG}{GC}$ , 得  $EG \parallel PC$ .

因为  $EG \subset$  平面  $EBD, PC \not\subset$  平面  $EBD$ ,  
所以  $PC \parallel$  平面  $EBD$ .

**(2) 【解】** 作  $AF \perp PD$ , 垂足为  $F$ ,  $F$  点即为所求.

因为  $PA \perp$  平面  $ABCD, DC \subset$  平面  $ABCD$ ,  
所以  $PA \perp DC$ .

又  $AB \parallel CD, AB \perp AD$ , 所以  $DC \perp AD$ .

因为  $AD \cap PA = A, AD, PA \subset$  平面  $PAD$ ,  
所以  $DC \perp$  平面  $PAD$ .

由  $AF \subset$  平面  $PAD$ , 得  $DC \perp AF$ .

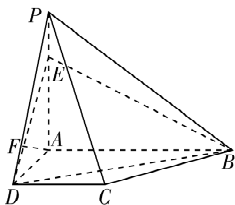
又  $DC \cap PD = D, PD, DC \subset$  平面  $PCD$ ,  
所以  $AF \perp$  平面  $PCD$ .

由  $PA = \sqrt{3}, AD = 1, PA \perp AD$ , 得  $PD = 2$ . 又

$PD \cdot AF = AD \cdot AP$ , 所以  $AF = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

故在  $\text{Rt} \triangle AFP$  中,  $PF = \sqrt{AP^2 - AF^2} = \frac{3}{2}$ .

故在侧棱  $PD$  上存在点  $F$ , 使得  $AF \perp$   
 $PCD, PF = \frac{3}{2}$ .





## 巩固练

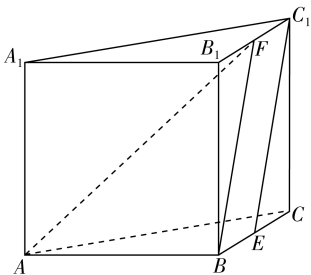
1. **A** 【解析】对于①,过不在一条直线上的三个点,有且只有一个平面,过共线的三个点有无数个平面,故①是假命题;对于②,垂直于同一直线的两条直线有可能平行、相交或异面,故②是假命题;对于③,一个平面内有两条直线与另一个平面平行,则这两个平面有可能平行或相交,故③是假命题;对于④,由线面垂直的性质定理得,垂直于同一平面的两条直线平行,故④是真命题. 故选 A.

2. **D** 【解析】当  $a \parallel \alpha$  时,  $\theta = 0^\circ$ ; 当  $a \perp \alpha$  时,  $\theta = 90^\circ$ ; 当  $a$  和  $\alpha$  斜交时,  $\theta$  的取值范围是  $\{\theta | 0^\circ < \theta < 90^\circ\}$ . 综上,  $\theta$  的取值范围是  $\{\theta | 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ\}$ .

3. **B** 【解析】对于①,若  $l \parallel m, m \parallel n$ , 又  $l \perp \alpha$ , 则  $n \perp \alpha$ , 故①正确. 对于②,若  $m \perp \alpha, n \perp \alpha$ , 所以  $m \parallel n$ , 由于  $l \parallel m$ , 则  $l \parallel n$ , 故②正确. 对于③,若  $l \parallel \alpha, l \perp m$ , 所以  $m \parallel \alpha$  或  $m \subset \alpha$  或  $m$  与  $\alpha$  相交, 故③错误. 故选 B.

4. **C** 【解析】因为四边形  $ABCD$  是菱形, 所以  $BD \perp AC$ . 又因为  $MC \perp$  平面  $ABCD$ , 所以  $BD \perp MC$ . 因为  $AC \cap MC = C, AC, MC \subset$  平面  $AMC$ , 所以  $BD \perp$  平面  $AMC$ . 又因为  $MA \subset$  平面  $AMC$ , 所以  $MA \perp BD$ . 显然直线  $MA$  与直线  $BD$  不相交. 故选 C.

5. **B** 【解析】如图, 在直棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中, 连接  $BF$ , 因为  $E$  为  $BC$  的中点,  $F$  为  $B_1C_1$  的中点, 所以  $C_1F \parallel BE, C_1F = BE$ ,



则四边形  $BEC_1F$  为平行四边形, 即有  $BF \parallel C_1E$ , 因此  $\angle AFB$  是异面直线  $AF$  与  $C_1E$  所成角 (或其补角).

因为  $BB_1 \perp$  平面  $ABC, AB \subset$  平面  $ABC$ ,



所以  $AB \perp BB_1$ . 又  $AB \perp BC, BB_1 \cap BC = B, BB_1, BC \subset \text{平面 } BCC_1B_1$ ,

所以  $AB \perp \text{平面 } BCC_1B_1$ . 因为  $BF \subset \text{平面 } BCC_1B_1$ , 所以  $AB \perp BF$ . 令  $AB = 2$ , 则  $BF = \sqrt{5}, AF = 3$ ,

所以异面直线  $AF$  与  $C_1E$  所成角的正弦值为  $\sin \angle AFB = \frac{AB}{AF} = \frac{2}{3}$ . 故选 B.

6. ①②③ 【解析】如

图, 连接  $AC$ . 由题意

知  $PA \perp \text{平面 } ABC$ ,

$BC \subset \text{平面 } ABC$ ,

$\therefore PA \perp BC$ . 又  $AC \perp$

$BC, PA \cap AC = A, PA, AC \subset \text{平面 } PAC$ ,

$\therefore BC \perp \text{平面 } PAC$ .  $\because AF \subset \text{平面 } PAC$ ,

$\therefore BC \perp AF$ . 又  $\because AF \perp PC, BC \cap PC = C$ ,

$BC, PC \subset \text{平面 } PBC, \therefore AF \perp \text{平面 } PBC$ .

$\because PB \subset \text{平面 } PBC, \therefore AF \perp PB$ . 又  $AE \perp$

$PB, AE \cap AF = A, AE, AF \subset \text{平面 } AEF$ ,

$\therefore PB \perp \text{平面 } AEF$ .  $\because EF \subset \text{平面 } AEF$ ,

$\therefore PB \perp EF$ .

又  $AF$  与  $AE$  不平行且相交,  $\therefore AE$  与平面  $PBC$  不垂直. 故①②③正确.

7.  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$  【解析】取正三角形  $ABC$  的中心

为  $O$ , 连接  $AO$  并延长交  $BC$  于  $D$ , 连接  $PD, PO$ , 则  $D$  为  $BC$  的中点,  $PO \perp \text{平面 } ABC$ , 则  $\angle PAO$  为直线  $PA$  和平面  $ABC$  所成的角. 在  $\text{Rt} \triangle PBD$  中,  $PB = 3$ ,

$BD = \frac{\sqrt{3}}{2}, BD \perp PD$ , 则  $PD = \frac{\sqrt{33}}{2}$ , 在

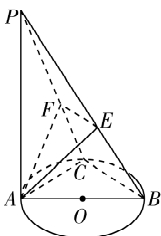
$\text{Rt} \triangle POD$  中,  $PD = \frac{\sqrt{33}}{2}, OD = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times$

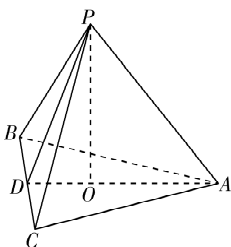
$\sqrt{3} = \frac{1}{2}$ , 因为  $PO \perp \text{平面 } ABC, OD \subset \text{平面 } ABC$ , 所以  $OD \perp PO$ , 则  $PO =$

$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{33}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2\sqrt{2}$ , 则

$\sin \angle PAO = \frac{PO}{PA} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ , 即直线  $PA$  和平

面  $ABC$  所成的角的正弦值为  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ .





8. (1) **【证明】** 因为  $BA = BC$ ,  $DA = DC$ ,  $BD = BD$ , 所以  $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ , 所以  $\angle ABD = \angle CBD = 60^\circ$ , 则  $BD \perp AC$ . 因为  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $BD \subset$  平面  $ABCD$ , 所以  $BD \perp PA$ , 又因为  $AC \cap PA = A$ ,  $AC, PA \subset$  平面  $APC$ , 所以  $BD \perp$  平面  $APC$ .

(2) **【解】** 因为  $BD \perp$  平面  $APC$ ,  $PC \subset$  平面  $APC$ , 所以  $PC \perp BD$ . 若  $PC \perp$  平面  $BGD$ , 由  $BG \subset$  平面  $BGD$ , 得  $BG \perp PC$ , 因为  $AB = BC = 2$ ,  $\angle ABC = 120^\circ$ , 由余弦定理可得

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos 120^\circ} = \sqrt{2^2 + 2^2 - 2 \times 2^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = 2\sqrt{3}.$$

因为  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $AB, AC \subset$  平面  $ABCD$ , 则  $PA \perp AC$ ,  $PA \perp AB$ , 所以  $PC =$

$$\sqrt{PA^2 + AC^2} = \sqrt{3 + 12} = \sqrt{15}, \quad PB =$$

$$\sqrt{PA^2 + AB^2} = \sqrt{3 + 4} = \sqrt{7}.$$

在  $\triangle PBC$  中,  $PB = \sqrt{7}$ ,  $BC = 2$ ,  $PC = \sqrt{15}$ , 所以

$$\cos \angle PCB = \frac{PC^2 + BC^2 - PB^2}{2PC \cdot BC} = \frac{15 + 4 - 7}{2 \times \sqrt{15} \times 2} =$$

$$\frac{\sqrt{15}}{5}, \text{ 所以 } CG = BC \cos \angle PCB = 2 \times$$

$$\frac{\sqrt{15}}{5} = \frac{2\sqrt{15}}{5}, \text{ 所以 } PG = PC - CG =$$

$$\sqrt{15} - \frac{2\sqrt{15}}{5} = \frac{3\sqrt{15}}{5}, \text{ 则 } \frac{PG}{GC} = \frac{3}{2}.$$

因此, 若  $G$  点满足  $PC \perp$  平面  $BGD$ , 则

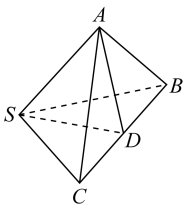
$$\frac{PG}{GC} = \frac{3}{2}.$$

9. **C** **【解析】**  $\because BC \subset$  平面  $ABC$ ,  $l \perp$  平面  $ABC$ ,  $\therefore BC \perp l$ . 又  $BC \perp CA$ ,  $CA$  与  $l$  有交点  $A$ ,  $\therefore BC \perp$  平面  $ACP$ .  $\because CP \subset$  平面  $ACP$ ,  $\therefore BC \perp CP$ ,  $\therefore \angle PCB = 90^\circ$ . 故选 C.

10. **C** **【解析】** 因为  $\angle ASB = \angle ASC = 60^\circ$ ,  $SA = SB = SC$ , 所以  $\triangle ASB$  与  $\triangle SAC$  都是等边三角形, 所以  $AB = AC$ .



如图所示,取  $BC$  的中点  $D$ ,连接  $AD, SD$ , 则  $AD \perp BC$ . 设  $SA = a$ , 则在  $\text{Rt} \triangle SBC$  中,



$$BC = \sqrt{2}a, CD = SD = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

$$\text{在 } \text{Rt} \triangle ADC \text{ 中, } AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a,$$

则  $AD^2 + SD^2 = SA^2$ , 所以  $AD \perp SD$ .

又因为  $BC \cap SD = D, BC, SD \subset \text{平面 } SBC$ ,

所以  $AD \perp \text{平面 } SBC$ .

则  $\angle ASD$  即为直线  $AS$  与平面  $SBC$  所成的角.

$$\text{在 } \text{Rt} \triangle ASD \text{ 中, } SD = AD = \frac{\sqrt{2}}{2}a,$$

所以  $\angle ASD = 45^\circ$ , 即直线  $AS$  与平面  $SBC$  所成的角为  $45^\circ$ .

11.  $\frac{1}{2}$  【解析】当  $AB_1 \perp \text{平面 } C_1DF$  时,

$AB_1 \perp DF$ , 又在直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $AA_1 \perp A_1B_1$ , 则  $\text{Rt} \triangle AA_1B_1 \sim \text{Rt} \triangle DEB_1$ , 故  $\angle B_1AA_1 = \angle FDB_1$ . 所以

$$\tan \angle B_1AA_1 = \tan \angle FDB_1, \text{ 即 } \frac{B_1A_1}{AA_1} =$$

$$\frac{B_1F}{B_1D},$$

$$\text{所以 } B_1F = \frac{B_1A_1 \cdot B_1D}{AA_1} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

12. (1) 【证明】如图, 连接  $EF$ , 由题意可知,

$PB = BC = AD = 6, PE = CE = CD - DE = 9$ , 在  $\triangle PBF$  中,  $PF^2 + BF^2 = PB^2$ ,

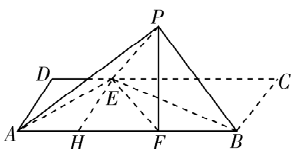
所以  $PF \perp BF$ . 作  $EH \perp AB$  于点  $H$ , 由勾股定理得  $EF = \sqrt{61}$ ,

在  $\triangle PEF$  中,  $EF^2 + PF^2 = PE^2$ , 所以  $PF \perp EF$ ,

因为  $BF \cap EF = F, BF \subset \text{平面 } ABED, EF \subset \text{平面 } ABED$ ,

所以  $PF \perp \text{平面 } ABED$ .

(2) 【解】连接  $AE$ , 由 (1) 知  $PF \perp \text{平面 } ABED$ ,



所以  $PF$  为三棱锥  $P-ABE$  的高.

设点  $A$  到平面  $PBE$  的距离为  $h$ ,

$$\text{Rt}\triangle PEB \text{ 的面积 } S_1 = \frac{1}{2} \times 6 \times 9 = 27,$$

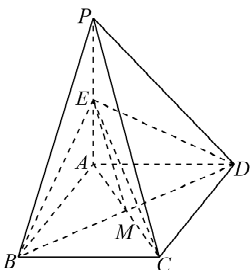
$$\triangle ABE \text{ 的面积 } S_2 = \frac{1}{2} \times 12 \times 6 = 36,$$

$$\text{因为 } V_{A-PBE} = V_{P-ABE}, \text{ 所以 } \frac{1}{3} S_1 \cdot h =$$

$$\frac{1}{3} S_2 \cdot PF, \text{ 解得 } h = \frac{8\sqrt{5}}{3},$$

$$\text{即点 } A \text{ 到平面 } PBE \text{ 的距离为 } \frac{8\sqrt{5}}{3}.$$

**13. ABD** 【解析】如图, 设  $AC$  交  $BD$  于点  $M$ , 连接  $EM$ .



因为四边形  $ABCD$  是正方形, 所以  $M$  为  $AC$  的中点.

又因为  $PC \parallel$  平面  $BDE$ ,  $PC \subset$  平面  $APC$ , 且平面  $APC \cap$  平面  $BDE = EM$ , 所以  $PC \parallel EM$ , 所以  $E$  为  $PA$  的中点, 故 A 正确.

由  $PA \perp$  底面  $ABCD$ ,  $BD \subset$  底面  $ABCD$ , 所以  $PA \perp BD$ ,

又因为  $AC \perp BD$ ,  $AC \cap PA = A$ ,  $AC, PA \subset$  平面  $PAC$ ,

所以  $BD \perp$  平面  $PAC$ , 故 B 正确.

因为  $AB \parallel CD$ , 所以  $PB$  与  $CD$  所成的角即  $PB$  与  $AB$  所成的角, 由  $PA = AB$

知  $\angle ABP = \frac{\pi}{4}$ , 故 C 错误.

$$\text{因为 } V_{C-BDE} = V_{E-BCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle BCD} \cdot EA,$$

$$V_{P-ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot PA,$$

$$\text{又因为 } S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} S_{\text{四边形}ABCD}, PA = 2EA,$$



所以  $\frac{V_{C-BDE}}{V_{P-ABCD}} = \frac{1}{4}$ , 故 D 正确. 故

选 ABD.

**14. BD** 【解析】分别取  $MR, OD$  的中点  $E, F$ , 连接  $AF$ .

因为  $M, N, R$  分别是  $OA, BC, AD$  的中点, 所以  $MR \parallel OD, NR \parallel CD$ ,

因为  $MR \not\subset$  平面  $OCD, OD \subset$  平面  $OCD, NR \not\subset$  平面  $OCD, CD \subset$  平面  $OCD$ , 所以  $MR \parallel$  平面  $OCD, NR \parallel$  平面  $OCD$ .

因为  $MR \cap NR = R$ , 所以平面  $MNR \parallel$  平面  $OCD$ .

因为  $MR \parallel OD, MR, OD$  的中点分别为  $E, F$ ,

所以  $AF$  过点  $E$ .

因为  $OA = AD$ , 所以  $AF \perp OD, AF \perp MR$ .

因为  $OA \perp$  底面  $ABCD, CD \subset$  底面  $ABCD$ , 所以  $OA \perp CD$ .

因为  $CD \perp AD, OA \cap AD = A, PA, AD \subset$  平面  $OAD$ ,

所以  $CD \perp$  平面  $OAD$ .

因为  $AF \subset$  平面  $OAD$ , 所以  $CD \perp AF$ .

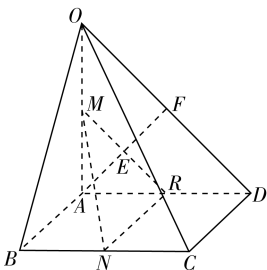
因为  $CD \cap OD = D, CD, OD \subset$  平面  $OCD$ , 所以  $AF \perp$  平面  $OCD$ .

因为平面  $MNR \parallel$  平面  $OCD$ , 所以  $AF \perp$  平面  $MNR$ ,

所以  $EF$  是两平面  $MNR, OCD$  的公垂线,  $EF$  的长是两平面间的距离,

因为  $OA = AD = 4, OA \perp AD$ , 所以  $AF = 2\sqrt{2}$ , 所以  $EF = \sqrt{2}$ ,

所以平面  $MNR$  与平面  $OCD$  的距离为  $\sqrt{2}$ , 点  $N$  与平面  $OCD$  的距离为  $\sqrt{2}$ , 直线  $MN$  与平面  $OCD$  的距离为  $\sqrt{2}$ , 点  $M$  与平面  $OCD$  的距离为  $\sqrt{2}$ , 故选 BD.





## 11.4.2 平面与平面垂直

### 易错记

**1-1. A** 【解析】对于 A, 取  $AC$  的中点  $O$ , 连接  $OB, OP$ , 如图, 因为  $\angle ABC = 90^\circ$ , 所以  $OA = OB = OC$ .

因为  $PA = PC$ , 所以  $PO \perp AC$ , 所以  $PO^2 + OA^2 = PA^2$ .

因为  $PA = PB = PC$ , 所以  $PO^2 + OB^2 = PB^2$ , 所以  $PO \perp OB$ .

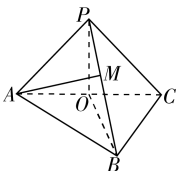
因为  $AC \cap OB = O, AC, OB \subset \text{平面 } ABC$ , 所以  $PO \perp \text{平面 } ABC$ .

因为  $PO \subset \text{平面 } PAC$ , 所以平面  $PAC \perp \text{平面 } ABC$ , 所以 A 正确.

对于 C, 假设  $PB \perp \text{平面 } ABC$ , 则由  $PO \perp \text{平面 } ABC$ , 可得过平面  $ABC$  外一点  $P$  有两条直线与平面  $ABC$  垂直, 这与过平面外一点只有一条直线与此平面垂直相矛盾, 所以 C 错误.

对于 D, 假设  $BC \perp \text{平面 } PAB$ , 则由  $PB \subset \text{平面 } PAB$ , 可得  $PB \perp BC$ , 所以  $\angle PBC = 90^\circ$ . 因为  $PB = PC$ , 所以  $\angle PBC = \angle PCB = 90^\circ$ , 所以  $\triangle PBC$  的内角和大于  $180^\circ$ , 这与三角形内角和定理相矛盾, 所以 D 错误.

对于 B, 假设平面  $PAB \perp \text{平面 } PBC$ , 过点  $A$  作  $AM \perp PB$  于点  $M$ , 如图, 因为平面  $PAB \cap$



平面  $PBC = PB, AM \subset \text{平面 } PAB$ , 所以  $AM \perp \text{平面 } PBC$ . 因为  $BC \subset \text{平面 } PBC$ , 所以  $AM \perp BC$ , 又  $AB \perp BC, AM \cap AB = A, AM, AB \subset \text{平面 } PAB$ , 所以  $BC \perp \text{平面 } PAB$ , 选项 D 中已证实不可能成立, 所以平面  $PAB$  与平面  $PBC$  不垂直, 所以 B 错误.

故选 A.

**1-2. (1) 【证明】**由已知可得  $AE = 3, BF = 4, EF = 5$ ,

则折叠后  $EG = 3, GF = 4, EF = 5$ ,

所以  $EF^2 = EG^2 + GF^2$ ,

所以  $EG \perp GF$ .

在梯形  $ABCD$  中,  $CF \perp AB$ , 则折叠后



$CF \perp EF, CF \perp FG$ . 又  $EF \cap FG = F, EF, FG \subset \text{平面 } EFG$ , 所以  $CF \perp \text{平面 } EFG$ , 又  $EG \subset \text{平面 } EFG$ , 所以  $CF \perp EG$ .

又  $GF \cap CF = F, GF, CF \subset \text{平面 } CFG$ , 所以  $EG \perp \text{平面 } CFG$ .

又  $EG \subset \text{平面 } DEG$ , 所以平面  $DEG \perp \text{平面 } CFG$ .

(2) 【解】过点  $G$  作  $GO \perp EF$  (图略).

由 (1) 知  $CF \perp \text{平面 } EFG, CF \subset \text{平面 } CDEF$ , 得平面  $EFG \perp \text{平面 } CDEF$ .

则  $GO$  即为四棱锥  $G-CDEF$  的高, 由 (1)

得  $GO = \frac{12}{5}$ , 所以所求体积  $V = \frac{1}{3} \cdot$

$$S_{\text{长方形}CDEF} \cdot GO = \frac{1}{3} \times 4 \times 5 \times \frac{12}{5} = 16.$$

### 题型诀

**1-1. C** 【解析】已知  $PA \perp \text{底面 } ABCD$ , 可得  $PA \perp AD, PA \perp CD$ , 又底面  $ABCD$  为矩形,  $\therefore AD \perp AB, CD \perp AD$ ,

而  $AB \cap PA = A, AD \cap PA = A$ ,

$PA, AB \subset \text{平面 } PAB$ ,

$AD, PA \subset \text{平面 } PAD$ ,

$\therefore AD \perp \text{平面 } PAB, CD \perp \text{平面 } PAD$ .

又  $AD \subset \text{平面 } PAD, CD \subset \text{平面 } PCD$ ,

$\therefore \text{平面 } PAD \perp \text{平面 } PAB, \text{平面 } PCD \perp \text{平面 } PAD$ .

又  $BC \parallel AD$ ,

$\therefore BC \perp \text{平面 } PAB$ , 又  $BC \subset \text{平面 } PBC$ ,

$\therefore \text{平面 } PBC \perp \text{平面 } PAB$ ,

选项 A, B, D 得证. 故选 C.

**1-2. 【证明】**由  $AB = BC = 2, \angle ABC = 60^\circ$ , 得  $\triangle ABC$  为等边三角形, 故  $OC \perp AB$ ,

$OC = \sqrt{3}$ . 由  $PA = PB = \sqrt{2}, AB = 2$ , 得  $PA^2 + PB^2 = AB^2$ , 则  $PA \perp PB$ , 因为  $O$  为  $AB$  的中点, 所以  $OP \perp AB, OP = 1$ . 由  $PO^2 + OC^2 =$

$PC^2$ , 得  $OP \perp OC$ . 由  $OP \perp AB, OP \perp OC$ ,

$AB \cap OC = O, AB, OC \subset \text{平面 } ABCD$ , 得

$OP \perp \text{平面 } ABCD$ . 又由  $OP \subset \text{平面 } PAB$ ,

得平面  $PAB \perp \text{平面 } ABCD$ .

**2-1. C** 【解析】连接  $B'C$  (图略). 因为  $AD$  是等腰直角三角形  $ABC$  的斜边  $BC$  上

的高, 所以  $BD = DC = \frac{\sqrt{2}}{2} AC, \angle ADC =$

$\angle ADB = 90^\circ$ , 所以  $\angle B'DC$  是二面角



$B'-AD-C$  的平面角.

因为  $\angle B'AC = 60^\circ$ , 且  $AB' = AC$ , 所以  $\triangle B'AC$  是等边三角形, 所以  $B'C = AB' = AC$ . 则在  $\triangle B'DC$  中,  $\angle B'DC = 90^\circ$ .

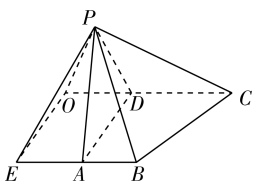
**2-2. (1) 【证明】** 因为平面  $ABCD \perp$  平面  $PCD$ , 平面  $ABCD \cap$  平面  $PCD = CD$ ,  $AD \subset$  平面  $ABCD$ ,  $AD \perp DC$ ,

所以  $AD \perp$  平面  $PCD$ , 又  $PC \subset$  平面  $PCD$ , 所以  $AD \perp PC$ .

(2) **【解】** 若选①, 过点  $P$  作  $PO \perp CO$  交  $CD$  的延长线于点  $O$ .

因为平面  $ABCD \perp$  平面  $PCD$ , 平面  $PCD \cap$  平面  $ABCD = CD$ ,  $PO \subset$  平面  $PCD$ , 所以  $PO \perp$  平面  $ABCD$ .

过  $O$  作  $OE \parallel AD$  交  $BA$  的延长线于点  $E$ , 连接  $PE$ .



因为  $AB \parallel CD$ ,  $AD \perp CD$ , 所以  $OE \perp AB$ .

因为  $PO \perp$  平面  $ABCD$ ,  $AB \subset$  平面  $ABCD$ , 所以  $PO \perp AB$ , 因为  $PO \cap OE = O$ ,  $PO \subset$  平面  $POE$ ,  $OE \subset$  平面  $POE$ , 所以  $AB \perp$  平面  $POE$ , 又  $PE \subset$  平面  $POE$ , 所以  $AB \perp PE$ , 所以  $\angle PEO$  就是二面角  $P-AB-C$  的平面角.

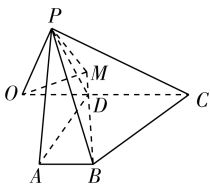
由题意得  $PO = PD \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$ ,  $OE = AD = 2$ , 所以  $PE = \sqrt{7}$ , 所以

$\cos \angle PEO = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ , 即二面角  $P-AB-C$  的余弦值为  $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ .

若选②, 过点  $P$  作  $PO \perp CD$  交  $CD$  的延长线于点  $O$ , 连接  $BD$ .

因为平面  $PCD \perp$  平面  $ABCD$ , 平面  $PCD \cap$  平面  $ABCD = CD$ ,  $PO \subset$  平面  $PCD$ , 所以  $PO \perp$  平面  $ABCD$ .

过点  $O$  作  $OM \perp BD$  交  $BD$  的延长线于点  $M$ , 连接  $PM$ . 因为  $PO \perp$  平



面  $ABCD$ ,  $BD \subset$  平面  $ABCD$ , 所以  $PO \perp BD$ ,

因为  $PO \cap OM = O$ ,  $PO \subset$  平面  $POM$ ,  $OM \subset$  平面  $POM$ , 所以  $BD \perp$  平面  $POM$ .



又  $PM \subset \text{平面 } POM$ , 所以  $BD \perp PM$ , 所以  $\angle PMO$  为二面角  $P-BD-C$  的平面角的补角. 易算得  $OM = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ,  $PM = \frac{\sqrt{95}}{5}$ ,

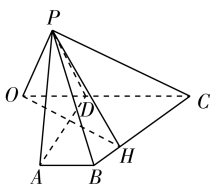
$$\cos \angle PMO = \frac{OM}{PM} = \frac{2\sqrt{19}}{19},$$

所以二面角  $P-BD-C$  的余弦值为

$$-\frac{2\sqrt{19}}{19}.$$

若选③, 过点  $P$  作  $PO \perp CD$  交  $CD$  的延长线于点  $O$ .

因为平面  $PCD \perp$  平面  $ABCD$ , 平面  $PCD \cap$  平面  $ABCD = CD$ ,  $PO \subset$  平面  $PCD$ ,



所以  $PO \perp$  平面  $ABCD$ . 过点  $O$  作  $OH \perp BC$  交  $BC$  于点  $H$ , 连接  $PH$ . 因为  $PO \perp$  平面  $ABCD$ ,  $BC \subset$  平面  $ABCD$ , 所以  $PO \perp BC$ , 又  $PO \cap OH = O$ ,  $PO \subset$  平面  $POH$ ,  $OH \subset$  平面  $POH$ , 所以  $BC \perp$  平面  $POH$ , 又  $PH \subset$  平面  $POH$ , 所以  $BC \perp PH$ , 所以  $\angle PHO$  为二面角  $P-BC-D$  的平面角. 易

算得  $OH = \frac{6\sqrt{5}}{5}$ ,  $PH = \frac{\sqrt{255}}{5}$ , 所以

$$\cos \angle PHO = \frac{OH}{PH} = \frac{2\sqrt{51}}{17}, \text{ 所以二面角 } P-$$

$BC-D$  的余弦值为  $\frac{2\sqrt{51}}{17}$ .

**2-3. (1) 【证明】** 因为  $PA$  垂直于  $\odot O$  所在的平面  $ABC$ ,  $BC \subset$  平面  $ABC$ , 所以  $PA \perp BC$ .

因为  $AB$  是  $\odot O$  的直径, 所以  $AC \perp BC$ , 因为  $PA, AC \subset$  平面  $PAC$ , 且  $PA \cap AC = A$ , 所以  $BC \perp$  平面  $PAC$ , 因为  $BC \subset$  平面  $PBC$ , 所以平面  $PAC \perp$  平面  $PBC$ .

(2) **【解】** 因为  $BC \perp$  平面  $PAC$ ,  $PC \subset$  平面  $PAC$ , 所以  $BC \perp PC$ ,

又  $AC \perp BC$ , 平面  $PBC \cap$  平面  $ABC = BC$ , 所以  $\angle PCA$  即为平面  $PBC$  与  $\odot O$  所在的平面所成二面角的平面角.

因为  $PA \perp$  平面  $ABC$ ,  $AC \subset$  平面  $ABC$ , 所以  $PA \perp AC$ ,  $\triangle PAC$  为直角三角形.



设  $\angle CAB = \theta, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 圆  $O$  的半径为  $R$ ,

则  $AC = 2R \cos \theta$ , 又  $PA = AB = 2R$ ,

所以  $\tan \angle PCA = \frac{PA}{AC} = \frac{2R}{2R \cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta}$ ,

因为  $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 所以  $\cos \theta \in (0, 1)$ ,

所以  $\tan \angle PCA = \frac{1}{\cos \theta} > 1$ ,

因为  $\angle PCA \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 所以  $\angle PCA \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ ,

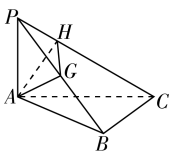
所以平面  $PBC$  与  $\odot O$  所在的平面所成二面角大小的范围为  $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**3-1. (1) 【证明】**  $\because PA \perp$  平面  $ABC, AB, AC, BC \subset$  平面  $ABC$ ,

$\therefore PA \perp AB, PA \perp AC, PA \perp BC$ ,

$\therefore \triangle PAB$  和  $\triangle PAC$  为直角三角形.

过点  $A$  作  $AG \perp PB$ , 垂足为  $G$ , 如图.



$\therefore$  平面  $PAB \perp$  平面  $PBC$ , 平面  $PAB \cap$  平面  $PBC = PB$ , 且  $AG \subset$  平面  $PAB$ ,

$\therefore AG \perp$  平面  $PBC$ .

$\therefore BC \subset$  平面  $PBC, \therefore AG \perp BC$ .

又  $AG \cap PA = A, AG, PA \subset$  平面  $PAB$ ,

$\therefore BC \perp$  平面  $PAB$ .

又  $PB, AB \subset$  平面  $PAB$ ,

$\therefore BC \perp PB, BC \perp AB$ , 即  $\triangle PBC$  和  $\triangle ABC$  为直角三角形.

$\therefore$  四面体  $P-ABC$  为“鳖臑”.

(2) **【解】** 过点  $G$  作  $GH \perp PC$ , 垂足为  $H$ , 连接  $AH$ ,

由(1)知  $AG \perp$  平面  $PBC$ , 又  $PC, GH \subset$  平面  $PBC$ ,

$\therefore AG \perp PC, AG \perp GH$ .

而  $GH \perp PC, AG \cap GH = G$ ,

$\therefore PC \perp$  平面  $AGH$ , 又  $AH \subset$  平面  $AGH$ ,

$\therefore PC \perp AH$ ,

$\therefore \angle AHG$  为二面角  $A-PC-B$  的平面角,

即  $\angle AHG = \frac{\pi}{3}$ .



$\therefore \angle BAC = \frac{\pi}{4}$ , 设  $AB = BC = x, x > 0$ ,

$$\therefore AG = \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}, AH = \frac{2\sqrt{2}x}{\sqrt{2x^2+4}},$$

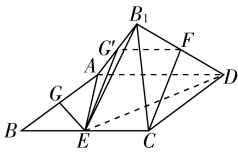
$$\text{在 Rt}\triangle AGH \text{ 中, } \sin \angle AHG = \frac{AG}{AH} = \frac{\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}}{\frac{2\sqrt{2}x}{\sqrt{2x^2+4}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2x^2+4}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 解得 } x = 2,$$

$\therefore AB$  的长度为 2.

**4-1. ABD 【解析】** 对于 A: 由菱形  $ABCD$  中,  $AB = 2, \angle BAD = 120^\circ, E$  为边  $BC$  的中点知  $\angle B = \frac{\pi}{3}$  且  $BE = 1$ , 易知  $AE \perp EC, AE \perp B_1E$ , 而  $EC \cap B_1E = E, EC, B_1E \subset \text{平面 } B_1EC$ , 故  $AE \perp \text{平面 } B_1EC$ , 又  $AE \subset \text{平面 } AB_1E$ , 所以平面  $AB_1E \perp \text{平面 } B_1EC$ , A 正确.

对于 B: 如图, 取  $AB_1$  的中点  $G'$ , 连接  $G'E, G'F$ , 又  $F$  为  $B_1D$  的中点, 则  $G'F \parallel AD$  且  $G'F = \frac{1}{2}AD$ , 而  $EC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD$  且  $EC \parallel AD$ , 所以  $G'F \parallel EC$  且  $G'F = EC$ , 即四边形  $FG'EC$  为平行四边形, 故  $CF \parallel EG'$ , 所以  $AB_1$  与  $CF$  的夹角为  $\angle AG'E$  或其补角, 取  $AB$  的中点  $G$ , 连接  $GE$ , 即  $\angle AG'E = \angle AGE$ , 由 A 分析易知  $\angle AGE = \frac{2\pi}{3}$ , 故  $AB_1$  与  $CF$  的夹角为  $\frac{\pi}{3}$ , B 正确.



对于 C: 由上述分析知翻折过程中, 当  $B_1E \perp \text{平面 } ABCD$  时,  $V_{B_1-AED}$  最大, 此时

$$V_{B_1-AED} = \frac{1}{3} \cdot B_1E \cdot S_{\triangle AED} = \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ C 错误.}$$

对于 D: 由 B 分析知  $EG' = CF$  且  $EG' \parallel CF$ , 故  $F$  的轨迹与  $G$  到  $G'$  的轨迹相同, 由 A 知  $B$  到  $B_1$  的轨迹为以  $E$  为圆心,

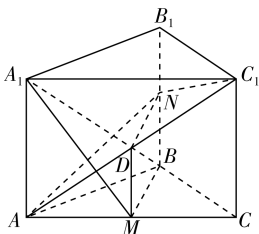


$BE$  为半径的半圆, 而  $G$  为  $AB$  中点, 故  $G$  到  $G'$  的轨迹为以  $AE$  中点为圆心,  $\frac{BE}{2}$  为半径的半圆, 所以点  $F$  的轨迹长度为

$$\frac{1}{2} \times 2\pi \times \frac{BE}{2} = \frac{\pi}{2}, D \text{ 正确.}$$

故选 ABD.

**4-2. (1) 【证明】** 因为  $AA_1 \perp$  底面  $ABC$ ,  $BM \subset$  平面  $ABC$ , 所以  $AA_1 \perp BM$ . 又  $M$  为棱  $AC$  的中点,  $AB = BC$ , 所以  $BM \perp AC$ . 因为  $AA_1 \cap AC = A$ ,  $AA_1, AC \subset$  平面  $ACC_1A_1$ , 所以  $BM \perp$  平面  $ACC_1A_1$ . 又  $AC_1 \subset$  平面  $ACC_1A_1$ , 所以  $BM \perp AC_1$ . 因为  $AC = 2$ , 所以  $AM = 1$ . 又  $AA_1 = \sqrt{2}$ , 在  $Rt \triangle ACC_1$  和  $Rt \triangle A_1AM$  中,  $\tan \angle AC_1C = \tan \angle A_1MA = \sqrt{2}$ , 所以  $\angle AC_1C = \angle A_1MA$ , 即  $\angle AC_1C + \angle C_1AC = \angle A_1MA + \angle C_1AC = 90^\circ$ , 所以  $A_1M \perp AC_1$ , 又  $BM \cap A_1M = M$ ,  $BM, A_1M \subset$  平面  $A_1BM$ , 所以  $AC_1 \perp$  平面  $A_1BM$ .



(2) **【解】** 当点  $N$  为  $BB_1$  的中点, 即  $\frac{BN}{BB_1} = \frac{1}{2}$  时, 平面  $AC_1N \perp$  平面  $AA_1C_1C$ .

证明如下: 设  $AC_1$  的中点为  $D$ , 连接  $DM, DN$ .

因为  $D, M$  分别为  $AC_1, AC$  的中点, 所以  $DM \parallel CC_1$  且  $DM = \frac{1}{2}CC_1$ , 又  $N$  为  $BB_1$  的中点,

所以  $DM \parallel BN$  且  $DM = BN$ , 所以四边形  $BNDM$  为平行四边形, 故  $BM \parallel DN$ ,

由(1)知,  $BM \perp$  平面  $ACC_1A_1$ , 所以  $DN \perp$  平面  $ACC_1A_1$ , 又  $DN \subset$  平面  $AC_1N$ , 所以平面  $AC_1N \perp$  平面  $ACC_1A_1$ .

### 巩固练

**1. C 【解析】**  $\because PA = BC = 1, PB = AC = \sqrt{2}, PC = \sqrt{3}, \therefore$  在  $\triangle PBC$  中,  $PB^2 +$



$BC^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 = (\sqrt{3})^2 = PC^2, \therefore BC \perp PB$ . 又  $PA \perp BC, PA \cap PB = P, \therefore BC \perp$  平面  $PAB$ .

又  $BC \subset$  平面  $ABC, BC \subset$  平面  $PBC$ ,  
 $\therefore$  平面  $PAB \perp$  平面  $PBC$ , 平面  $PAB \perp$  平面  $ABC$ , 故选项 A, B 正确.

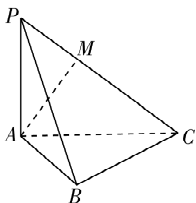
$\therefore$  在  $\triangle PAC$  中,  $PA^2 + AC^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 = PC^2, \therefore PA \perp AC$ .

$\therefore PA \perp BC, BC \cap AC = C, BC, AC \subset$  平面  $ABC$ ,

$\therefore PA \perp$  平面  $ABC$ .

又  $\because PA \subset$  平面  $PAC, \therefore$  平面  $PAC \perp$  平面  $ABC$ , 故选项 D 正确.

对于 C 选项, 假设平面  $PAC \perp$  平面  $PBC$ , 则过点  $A$  作  $AM \perp PC$  于点  $M$ , 如图.



由平面  $PAC \cap$  平面  $PBC = PC$ ,

$\therefore AM \perp$  平面  $PBC$ , 则  $AM \perp BC$ .

又  $PA \perp BC, PA \cap AM = A, \therefore BC \perp$  平面  $PAC, \therefore BC \perp AC$ ,

$\therefore PA \perp AB, \therefore AB = \sqrt{PB^2 - PA^2} = 1$ ,

$\therefore AB^2 + BC^2 = 2 = AC^2, \therefore BC \perp AB$ ,

$\therefore BC \perp AC$  与  $BC \perp AB$  矛盾, 故假设不正确, 故选项 C 错误.

故选 C.

**2. B 【解析】**  $\because PA \perp$  底面  $ABCD, CD \subset$  平面  $ABCD, \therefore CD \perp PA$ .

又底面  $ABCD$  是正方形,  $\therefore CD \perp AD$ .

又  $PA \cap AD = A, PA, AD \subset$  平面  $PAD$ ,

$\therefore CD \perp$  平面  $PAD$ , 又  $PD \subset$  平面  $PAD$ ,

$\therefore CD \perp PD$ ,

可知  $\angle PDA$  为侧面  $PCD$  与底面  $ABCD$  所成的二面角的平面角. 在  $\text{Rt} \triangle PAD$  中, 由  $PA = AD = 1$ , 可得  $\angle PDA = 45^\circ$ .

$\therefore$  侧面  $PCD$  与底面  $ABCD$  所成的二面角的大小是  $45^\circ$ . 故选 B.



**3. C 【解析】**对于①,由题意得, $BB_1 \parallel AA_1$ ,则直线  $AD_1$  与直线  $BB_1$  所成的角与直线  $AD_1$  与直线  $AA_1$  所成的角相等,即  $\angle A_1AD_1$ ,在长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, $AA_1 = 1, AB = BC = \sqrt{3}$ ,所以  $\tan \angle A_1AD_1 = \frac{A_1D_1}{A_1A} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ ,因为  $0^\circ < \angle A_1AD_1 < 90^\circ$ ,所以  $\angle A_1AD_1 = 60^\circ$ ,即直线  $AD_1$  与直线  $BB_1$  所成的角为  $60^\circ$ ,故①正确;

对于②,在长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, $BC \perp$  平面  $CC_1D_1D$ ,所以直线  $BC_1$  与平面  $CC_1D_1D$  所成的角为  $\angle BC_1C$ ,

因为  $\tan \angle BC_1C = \frac{BC}{C_1C} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}, 0^\circ < \angle BC_1C < 90^\circ$ ,所以  $\angle BC_1C = 60^\circ$ ,则直线  $BC_1$  与平面  $CC_1D_1D$  所成的角为  $60^\circ$ ,故②正确;

对于③,在长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, $AB \perp$  平面  $BB_1C_1C, BC_1 \subset$  平面  $BB_1C_1C, BC \subset$  平面  $BB_1C_1C$ ,所以  $BC_1 \perp AB, BC \perp AB$ ,又因为平面  $ABC_1D_1 \cap$  平面  $ABCD = AB$ ,所以平面  $ABC_1D_1$  与平面  $ABCD$  所成的二面角的平面角为  $\angle CBC_1$ ,由②得, $\angle CBC_1 = 90^\circ - \angle BC_1C = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ,则平面  $ABC_1D_1$  与平面  $ABCD$  所成的二面角为  $30^\circ$ ,故③错误;

对于④,在长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, $AB \perp$  平面  $ADD_1A_1, AB \subset$  平面  $ABC_1D_1$ ,所以平面  $ABC_1D_1 \perp$  平面  $ADD_1A_1$ ,则平面  $ABC_1D_1$  与平面  $ADD_1A_1$  所成的二面角为直二面角,故④正确. 故选 C.

**4. 3 【解析】** $\because PA \perp PB, PA \perp PC, PB \cap PC = P, PB, PC \subset$  平面  $PBC, \therefore PA \perp$  平面  $PBC$ .

$\because PA \subset$  平面  $PAB, PA \subset$  平面  $PAC,$

$\therefore$  平面  $PAB \perp$  平面  $PBC$ , 平面  $PAC \perp$  平面  $PBC$ .

同理可证平面  $PAB \perp$  平面  $PAC$  成立.

共 3 对互相垂直的面.

5.  $60^\circ$  【解析】如图,取

$AB$  中点  $M$ , 连接  $PM$ ,

$MC, \because PA = PB = AC =$

$BC, \therefore PM \perp AB,$

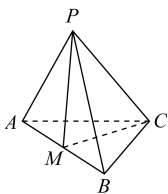
$CM \perp AB,$

$\therefore \angle PMC$  就是二面角  $P-AB-C$  的平面角.

在  $\triangle PAB$  中,  $PM = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 1,$

同理  $MC = 1$ , 则  $\triangle PMC$  是等边三角形,

$\therefore \angle PMC = 60^\circ.$

6. (1) 【证明】取  $CD$  中点  $O$ , 连接  $PO$ ,

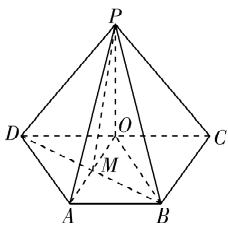
$AO, BO.$

因为  $PC =$

$PD, O$  为  $DC$

的中点, 所以

$PO \perp CD$ , 又



平面  $PCD \perp$  平面  $ABCD, PO \subset$  平面

$PCD$ , 平面  $PCD \cap$  平面  $ABCD = CD$ ,

所以  $PO \perp$  平面  $ABCD$ , 而  $BD \subset$  平面

$ABCD$ , 所以  $PO \perp BD$ . 因为  $DO = AB = 4$

且  $DO \parallel AB$ , 所以四边形  $ABOD$  为平行

四边形, 又  $DA = DO = 4$ , 所以平行四边

形  $ABOD$  为菱形, 因此  $AO \perp BD$ . 因为

$AO \cap PO = O, PO \subset$  平面  $POA, AO \subset$  平

面  $POA$ , 所以  $BD \perp$  平面  $POA$ , 因为

$PA \subset$  平面  $POA$ , 所以  $BD \perp PA$ .

(2) 【解】设  $AO$  与  $BD$  交于点  $M$ , 连接

$PM$ , 由 (1) 知  $BD \perp$  平面  $POA$ , 而且

$AM \subset$  平面  $POA, PM \subset$  平面  $POA$ , 所以

$AM \perp BD, PM \perp BD$ , 所以  $\angle AMP$  是二

面角  $A-BD-P$  的平面角. 又  $PO \perp$  平面

$ABCD$ , 所以  $PM = \sqrt{PO^2 + OM^2} =$

$\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}, PA = \sqrt{PO^2 + OA^2} =$

$\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ , 所以在  $\triangle AMP$  中,

$$\cos \angle AMP = \frac{AM^2 + PM^2 - PA^2}{2AM \cdot PM} = -\frac{2\sqrt{13}}{13},$$

即二面角  $A-BD-P$  的余弦值为

$$-\frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

7. C 【解析】由题意知,  $BC \perp AB$ , 平面

$ABC \perp$  平面  $ABB_1A_1$ ,

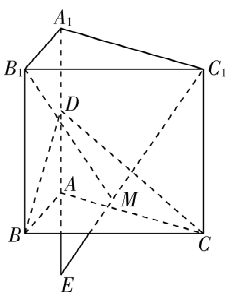


平面  $ABC \cap$  平面  $ABB_1A_1 = AB$ ,  $BC \subset$  平面  $ABC$ ,

$\therefore BC \perp$  平面  $ABB_1A_1$ . 又  $BC \subset$  平面  $BCD$ ,

$\therefore$  平面  $BCD \perp$  平面  $ABB_1A_1$ .

$\therefore$  易得点  $B_1$  关于平面  $BCD$  的对称点  $E$  落在  $A_1A$  的延长线上, 且  $AE = \sqrt{3}$ , 即  $A_1E = 3\sqrt{3}$ , 如图所示, 当  $B_1M + C_1M$  的值最小时,  $C_1, M, E$  三点共线.

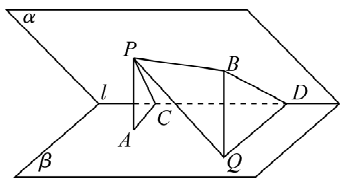


$\therefore B_1M + C_1M = EM + C_1M \geq EC_1 = \sqrt{A_1C_1^2 + A_1E^2} = \sqrt{9 + 9 + 27} = 3\sqrt{5}$ . 故选 C.

8.  $2\sqrt{3}$   $90^\circ$  【解析】如图, 分别作  $PA \perp \beta$ ,  $AC \perp l$ ,  $QB \perp \alpha$ ,  $QD \perp l$ , 连接  $BD$ ,  $BP$ ,  $PC$ ,

则  $\angle ACP = \angle QDB = 60^\circ$ . 因为  $QB = 2\sqrt{3}$ , 所以  $PQ = \sqrt{QB^2 + PB^2} = \sqrt{12 + PB^2} \geq 2\sqrt{3}$ . 当点  $P$  与点  $B$  重合时,  $PQ$  取最小值. 又此时  $PQ = 2\sqrt{3} > PA$  成立,

所以  $P, Q$  两点之间距离的最小值为  $2\sqrt{3}$ .



此时点  $P$  与点  $B$  重合, 此时  $QP \perp \alpha$ , 所以  $PQ$  与平面  $\alpha$  所成的角为  $90^\circ$ .

9. (1) 【证明】 $\because l \parallel AB$ ,  $l \subset$  平面  $PCD$ ,  $AB \not\subset$  平面  $PCD$ ,  
 $\therefore AB \parallel$  平面  $PCD$ .

又  $AB \subset$  平面  $ABCD$ , 平面  $ABCD \cap$  平面  $PCD = CD$ ,

$\therefore AB \parallel CD$ .



$$\therefore \angle BOC = 45^\circ, \therefore \angle OCD = 45^\circ.$$

$$\text{又 } OC = OD, \therefore \angle ODC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DOC = 90^\circ, \text{即 } OD \perp OC.$$

$$\therefore PO \perp \text{平面 } ABCD, OD \subset \text{平面 } ABCD,$$

$$\therefore OD \perp PO.$$

$$\therefore PO \cap OC = O, PO, OC \subset \text{平面 } POC,$$

$$\therefore OD \perp \text{平面 } POC.$$

又  $OD \subset \text{平面 } POD, \therefore \text{平面 } POC \perp \text{平面 } POD.$

$$(2) \text{【解】} \therefore AB = 4, \therefore OC = OD = 2,$$

$$\therefore V_{P- OCD} = \frac{1}{3} S_{\triangle OCD} \cdot PO = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times$$

$$PO = \frac{4}{3}, \text{解得 } PO = 2.$$

$$\therefore PC = PD = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}, CD = \sqrt{4+4} =$$

$$2\sqrt{2}, \therefore \triangle PCD \text{ 为等边三角形},$$

$$\therefore S_{\triangle PCD} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

设点  $O$  到平面  $PCD$  的距离为  $h$ , 则

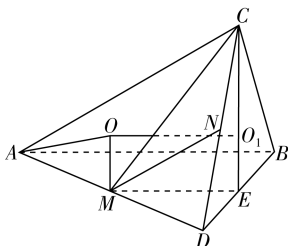
$$V_{O-PCD} = V_{P-OCD} = \frac{1}{3} S_{\triangle PCD} \cdot h = \frac{2\sqrt{3}}{3} h = \frac{4}{3},$$

$$\text{解得 } h = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

由(1)知  $AB \parallel \text{平面 } PCD, \therefore$  点  $B$  到平面  $PCD$  的距离即为点  $O$  到平面  $PCD$  的距离,

$$\therefore \text{点 } B \text{ 到平面 } PCD \text{ 的距离为 } \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

10. **BCD** 【解析】对于 A, 取  $BD$  中点  $E$ , 连接  $CE, ME$ , 如图,



因为  $\triangle BCD$  是等边三角形, 所以  $CE \perp BD$ , 又  $M$  是  $AD$  的中点,

所以  $ME \parallel AB$ , 因为  $AB \perp BD$ , 所以

$ME \perp BD$ , 又  $CE \cap ME = E, CE,$

$ME \subset \text{平面 } CME$ , 于是得  $BD \perp \text{平面 } CME$ , 因为  $CM \subset \text{平面 } CME$ , 所以

$CM \perp BD$ , A 不正确;



对于 B, 取  $CD$  的中点  $N$ , 连接  $MN$ , 因为  $M$  是  $AD$  的中点, 所以  $MN \parallel AC$ , 又  $AC \subset \text{平面 } ABC, MN \not\subset \text{平面 } ABC$ , 所以  $MN \parallel \text{平面 } ABC$ , B 正确;

对于 C, 因为  $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot DB = 2$ ,

要三棱锥  $C-ABD$  的体积最大, 当且仅当点  $C$  到平面  $ABD$  距离最大, 由选项 A 知, 点  $C$  到直线  $BD$  的距离  $CE = \sqrt{3}$ ,  $\angle CEM$  是二面角  $A-BD-C$  的平面角, 当  $\angle CEM = 90^\circ$  时,  $CE \perp \text{平面 } ABD$ , 即当点  $C$  到平面  $ABD$  的距离为  $CE = \sqrt{3}$  时, 三棱锥  $C-ABD$  的体积最大, 此时点  $C$  在平面  $ABD$  上的射影为点  $E$ , 从而可知  $\triangle CAD$  在平面  $BAD$  上的射影为  $\triangle EAD$ , 设二面角  $C-AD-B$  的平面角为  $\theta$ , 则有  $S_{\triangle CAD} \cdot \cos \theta = S_{\triangle EAD}$ ,

在  $\triangle EAD$  中,  $AE = \sqrt{5}$ ,  $S_{\triangle EAD} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 1$ ,

在  $\triangle CAD$  中,  $AC = 2\sqrt{2}$ , 又  $AD = 2\sqrt{2}$ ,  $CD = 2$ ,

所以  $\cos \angle CAD = \frac{AC^2 + AD^2 - CD^2}{2AC \cdot AD} = \frac{8 + 8 - 4}{2 \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{3}{4}$ ,

于是有  $\sin \angle CAD = \frac{\sqrt{7}}{4}$ ,

所以  $S_{\triangle CAD} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{7}}{4} = \sqrt{7}$ ,

从而有  $\sqrt{7} \cos \theta = 1$ ,

所以  $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{7}}$ , 则  $\sin \theta = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$ ,

则  $\tan \theta = \sqrt{6}$ , C 正确;

对于 D, 三棱锥  $C-ABD$  的外接球被平面  $BCD$  所截小圆圆心  $O_1$  是正三角形  $BCD$  的中心,  $O_1E = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , 被平面

$ABD$  所截小圆圆心为点  $M$ , 设球心为  $O$ , 连接  $OO_1, OM$ , 则  $OO_1 \perp \text{平面 } BCD, OM \perp \text{平面 } ABD$ , 当二面角  $A-BD-C$  为直角时, 由选项 C 知,  $CE \perp$



平面  $ABD$ ,  $ME \perp$  平面  $BCD$ , 则  $OM \parallel O_1E$ ,  $OO_1 \parallel ME$ , 则四边形  $OO_1EM$  为矩形,  $OM = O_1E = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , 连接  $AO$ , 在  $\text{Rt}\triangle AOM$  中,  $AO = \sqrt{AM^2 + OM^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{3}}$ , 所以三棱锥  $C-ABD$  的外接球的表面积  $S = 4\pi \cdot AO^2 = \frac{28\pi}{3}$ , D 正确. 故选 BCD.

**11. ACD** 【解析】对于 A, 由题意得  $G$  为  $DE$  的中点, 则  $A'D = A'E$ ,  $FE = FD$ , 故  $FG \perp DE$ ,  $A'G \perp DE$ .

由  $FG \cap A'G = G$ ,  $FG, A'G \subset$  平面  $FGA'$ , 得  $DE \perp$  平面  $FGA'$ , 因为  $A'F \subset$  平面  $FGA'$ , 故  $A'F \perp DE$ , A 正确.

对于 B, 由  $AF$  为中线,  $DE$  为中位线, 得  $EF \parallel BD$ , 故异面直线  $A'E$  与  $BD$  所成角 (或其补角) 为  $\angle A'EF$ ,  $\angle A'EF$  可取得  $90^\circ$ , 故异面直线  $A'E$  与  $BD$  可能垂直, B 错误.

对于 C, 由 A 知,  $DE \perp$  平面  $FGA'$ ,  $DE \subset$  平面  $BCED$ , 故平面  $FGA' \perp$  平面  $BCED$ , C 正确.

对于 D, 由 C 知, 平面  $FGA' \perp$  平面  $BCED$ , 故动点  $A'$  在平面  $ABC$  上的射影在线段  $AF$  上, D 正确.

故选 ACD.